GEKOPPELTE MIKROSTREIFENLEITUNGEN AUF SENKRECHT MAGNETISIERTEM FERRITSUBSTRAT

DISSERTATION

zur

Erlangung des Grades eines

Doktor-Ingenieurs

der

Abteilung für Elektrotechnik

an der Ruhr- Universität Bochum

von

Roland Hoffmann

Vechta

1982

Bochum 1981

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549226_0038

GEKOPPELTE MIKROSTREIFENLEITUNGEN AUF SENKRECHT MAGNETISIERTEM FERRITSUBSTRAT

DISSERTATION

zur

Erlangung des Grades eines

Doktor-Ingenieurs

der

Abteilung für Elektrotechnik

an der Ruhr- Universität Bochum

von

Roland Hoffmann

Vechta

Bochum 1981

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Dissertation eingereicht am: 2.11.1981

Tag der mündlichen Prüfung: 8.1.1982

Referent: Prof. Dr. Hans Severin

Korreferent: Prof. Dr. Siegfried Blume

Verzeichnis häufig verwendeter Formelzeichen V

1. Einleitung 1

2. Variationsprobleme bei nichtselbstadjungierten Problemen 3

3. Randwertproblem für gekoppelte Leitungen 23

3.1 Allgemeine Überlegungen 23

3.2 Herleitung des Greenschen Tensors 26

3.3 Lösung des Randwertproblems für zwei gekoppelte Leitungen 38

3.3.1 Herleitung eines linearen Gleichungssystems 38

3.3.2 Herleitung von stationären Ausdrücken 48

4. Numerische Auswertung und Ergebnisse für zwei gekoppelte Leitungen gleicher Breite 52

4.1 Berechnung nach der Momentenmethode 52

4.1.1 Einzelleitung 52

4.1.2 Zwei gekoppelte Leitungen 56

4.2 Berechnung mittels stationärer Formel 65

4.2.1 Einzelleitung 65

4.2.2 Zwei gekoppelte Leitungen 69

5. Messungen 72

6. Weitere Anwendungsmöglichkeiten des Verfahrens 80

6.1 Zwei unsymmetrische Leitungen 80

6.2 Mehr als zwei Leitungen 80

7. Zusammenfassung und Ausblick 83

8. Anhang 85

9. Literaturverzeichnis 99

Verzeichnis häufig verwendeter Formelzeichen

a_n, a_{1n}, a_{2n}	Entwicklungskoeffizienten der y-Komponente der Flächenstromdichte
A, A_i	Amplitudenkonstanten bei der Feldberechnung
$\vec{A}$	Vektor der a_n
$\vec{A}_1$, $\vec{A}_2$	Vektoren, allgemein
b	auf k_o bezogene Wellenzahl k_z
b_n, b_{1n}, b_{2n}	Entwicklungskoeffizienten der z-Komponente der Flächenstromdichte
B, B_i	Amplitudenkonstanten bei der Feldberechnung
B	Operator, allgemein
$\vec{B}$	Vektor der b_n
C, C_i	Amplitudenkonstanten bei der Feldberechnung
$\vec{C}$	Vektor der Entwicklungskoeffizienten a_n, b_n
d_x	Differentialoperator
D, D_i	Amplitudenkonstanten bei der Feldberechnung
$\vec{E}$	Vektorphasor der elektrischen Feldstärke
$\vec{E}_t$	transversaler Anteil des Vektors $\vec{E}$
$\vec{E}_p$	Probefunktion
f, f_R	Frequenzen
f_n, f_{1n}, f_{2n}	Entwicklungsfunktionen der y-Komponente der Flächenstromdichte
$\bar{f}_n$, $\bar{f}_{1n}$, $\bar{f}_{2n}$	Fouriertransformierte der f_n, f_{1n}, f_{2n}
$\vec{F}$	Feldvektor
$\vec{F}^a$	Feldvektor des adjungierten Problems
$\vec{F}_p$	Probefunktion

g_n, g_{1n}, g_{2n}	Entwicklungsfunktionen der z-Komponente der Flächenstromdichte
$\bar{g}_n$, $\bar{g}_{1n}$, $\bar{g}_{2n}$	Fouriertransformierte der g_n, g_{1n}, g_{2n}
G	Differentialoperator im Resonatorproblem
G_t, G_z	Operatoren im Wellenleitungsproblem
G_{ij}	Elemente des Greenschen Tensors $\mathbf{G}$, i,j=x,y,z
$\mathbf{G}$, $\mathbf{G}_{eh}$, $\mathbf{G}_{he}$, $\mathbf{G}_h$	Greensche Tensoren
$\vec{H}$	Vektorphasor des magnetischen Feldes
$\vec{H}_t$	transversaler Anteil von $\vec{H}$
$\vec{\bar{H}}$	Vektorphasor des normierten magnetischen Feldes
$\underset{-}{H}^i$	inneres statisches Magnetfeld
I	stationäres Funktional
$\vec{J}$	Vektorphasor der elektrischen Flächenstromdichte
J_o	Besselfunktion der Ordnung 0
k_o	Wellenzahl des freien Raumes
k_z	Wellenzahl einer in z-Richtung homogenen Wellenleitung
$\vec{K}$	Vektorphasor der normierten elektrischen Flächenstromdichte
l	Resonatorlänge
$\bar{l}$	elektrische Länge des Resonators
L_i	Amplitudenkonstanten bei der Feldberechnung
L_t	Operator im Wellenleitungsproblem
M_i	Amplitudenkonstanten bei der Feldberechnung
M_s	Sättigungsmagnetisierung des Ferritmediums
$\vec{M}$	Vektorphasor der magnetischen Stromdichte

M	Matrix des Gleichungssystems aus dem Variationsverfahren
M_{yy}, M_{yz} M_{zy}, M_{zz}	Untermatrizen
M_{yymn}	Element von M_{yy}
M_1, M_2	Matrizen für die Einzelleitung
M_{12}, M_{21}	Kopplungsuntermatrizen
N	Matrix des Gleichungssystems aus der Momentenmethode
N_{yymn}	Element von N
$\vec{n}$	Normaleneinheitsvektor auf der Berandung
p	Ortsfrequenzvariable
$\vec{Q}$	Quellenvektor
s	Abstand zweier Streifenleitungen
s_1, s_3	charakteristische Wurzeln der Wellengleichung
S	Operator der Reflexionssymmetrie
t	Verschiebung eines Streifenleiters aus der Mittellage
T_{ij}	Gewichtsfunktionen
u	Funktion, allgemein
u_ε	Variation von u
$\vec{u}_z$	Einheitsvektor in z-Richtung
v	Funktion, allgemein
v_κ	Variation von v
w	Streifenleiterbreite
W	Materialoperator
x_1, x_2	allgemeine transversale Koordinaten
Z_o	Feldwellenwiderstand des freien Raumes

Γ	Greenscher Tensor
ε	Variationsparameter
ε, ε_r	Permittivitätszahlen
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Permittivitätstensor
λ	Wellenlänge
Λ	Operator des dreidimensionalen Randwertproblems für den Resonator
Λ_t	Operator des zweidimensionalen Randwertproblems für die Wellenleitung
Λ^a	adjungierter Operator
Λ_E	Operator der Wellengleichung des elektrischen Feldes
μ	Element des Permeabilitätstensors
μ	Abkürzung
μ, μ_r	Permeabilitätstensoren
κ	Variationsparameter
κ	Element des Permeabilitätstensors
ω	Kreisfrequenz

Symbole

$\vec{A}$	Vektor
A^*	konjugiert komplexe Größe zu A
$\overline{A}$	Fouriertransformierte von A
$\mathbf{A}$	Matrix
$\mathbf{A}^{-1}$	inverse Matrix
$\mathbf{A}^T$	transponierte Matrix
$\langle \cdot , \cdot \rangle$	Skalarprodukt
∇	Nabla-Operator

1. Einleitung

Der Aufbau von Mikrostreifenleitungen auf gyrotropem Ferritsubstrat bietet die Möglichkeit der Realisierung nichtreziproker Bauelemente. Darüberhinaus sind die Eigenschaften von Bauelementen auf Ferritsubstrat durch das statische Magnetfeld von außen steuerbar. Zur Ausnutzung dieser Effekte ist die genaue Kenntnis von Feldverteilung und Dispersion der zugrunde liegenden Leitungsstrukturen notwendig. Diese lassen sich in Abhängigkeit von einer Vielzahl von Parametern nur durch Berechnung gewinnen. Im Gegensatz zum Stand der Untersuchungen bei Mikrostreifenleitungen auf dielektrischem Substrat sind bei den entsprechenden Strukturen auf Ferritsubstrat nur für die gerade Leitung, sowie Ring- und Scheibenresonator Berechnungen ohne weitgehende feldtheoretische Näherungen durchgeführt worden.

Stark vereinfachende Näherungen reichen hier nicht aus, um einen hinreichend genauen Einblick in die Funktionsweise von komplizierteren Strukturen auf gyrotropem Substrat zu geben. Hier sollen deshalb Lösungsverfahren in ihrer Brauchbarkeit für gyrotrope Trägermaterialien vorgestellt werden, die ohne weitreichende feldtheoretische Näherungen auskommen. Da eine exakte Lösungsmöglichkeit in geschlossener Form nicht bekannt ist, muß auf geeignete numerische Verfahren zurückgegriffen werden. Dies sind hier die durch die Stichworte "stationärer Ausdruck" und "Momentenmethode" charakterisierten Verfahren. Über die Anwendung dieser Methoden auf gyrotrope Materialien sind in der Literatur nur wenige, zum Teil sich widersprechende Aussagen anzutreffen. Die vorliegende Untersuchung beschäftigt sich daher auch allgemein mit der Methodik stationärer Ausdrücke. Dabei gelingt es, durch Anwendung des energetischen Funktionals den Zusammenhang zwischen den unterschiedlichen Ausdrücken herzustellen und eine Systematik anzugeben, die für die verschiedenen Anwendungsfälle die richtige Benutzung der Variationsmethode gestattet.

Bei Magnetisierung des Ferritsubstrats senkrecht zur Substrat-

ebene und zur Ausbreitungsrichtung ist bei der geraden Mikrostreifenleitung die kantengeführte Welle die Grundwelle. Gerade, gekoppelte Leitungen lassen bei dieser Magnetisierungsrichtung interessante Eigenschaften erwarten. Die Analyse dieser Leitungsstruktur erstreckt sich bei Vernachlässigung der Verluste im Substrat und in der Metallisierung auf die feldtheoretisch exakte Berechnung der Stromverteilung auf den Leitungen, der transversalen Feldverteilung und der Dispersion der beiden Normalwellen für zunächst zwei symmetrische, gekoppelte Leitungen. Die Momentenmethode liefert exakte Ergebnisse für diese Größen, wobei sie allerdings einen hohen analytischen Aufwand und lange Rechenzeiten benötigt. Wird lediglich der Verlauf der Dispersion gewünscht, so liefert deren Berechnung mit einem stationären Ausdruck in erheblich kürzerer Rechenzeit hinreichend genaue Ergebnisse. Beide Verfahren werden auf zwei unsymmetrische Leitungen und die Verkopplung von mehr als zwei Leitungen erweitert.

Die erhaltenen numerischen Ergebnisse werden mit den Berechnungen anderer Autoren und mit entsprechenden eigenen Messungen verglichen. Dabei wird auf die besondere Problematik der Messung der Dispersion derartiger offener Leitungsstrukturen und der nichtreziproken Wellenausbreitung eingegangen.

2. Variationsverfahren bei nichtselbstadjungierten Problemen

Viele Aufgabenstellungen der mathematischen Physik lassen sich durch partielle Differentialgleichungen oder Integralgleichungen beschreiben. Dies sind z. B. im Fall der Theorie der elektromagnetischen Wellen die Maxwellschen Gleichungen. Oft ist es möglich, die Lösungen eines Problems durch diejenige Funktion zu charakterisieren, die einem geeigneten Funktional einen minimalen (maximalen) Wert erteilt, also die Lösung eines linearen Randwertproblems auf ein äquivalentes Variationsprinzip zurückzuführen. Wird dieses dazu benutzt, die Differentialgleichung des Problems herzuleiten (Eulersche Differentialgleichung), so handelt es sich um eine indirekte Methode der Variationsrechnung. Demgegenüber wird bei der direkten Methode die Lösung aus dem Variationsprinzip unter Umgehung der Differentialgleichung gewonnen.

Läßt sich für ein kompliziertes Randwertproblem keine exakte Lösung gewinnen, so bieten die direkten Methoden die Basis für wirkungsvolle Verfahren, brauchbare Näherungslösungen zu berechnen. Darüberhinaus können stationäre Ausdrücke zur näherungsweisen Berechnung eines Parameters des Problems (z. B. der Ausbreitungskonstante, der Resonanzfrequenz) angegeben werden. Zur Herleitung derartiger stationärer Ausdrücke muß die Randwertaufgabe in eine äquivalente Variationsaufgabe überführt werden. Eine in der Literatur vorwiegend außerhalb der Theorie elektromagnetischer Wellen verbreitete Vorgehensweise ist die Energiemethode [1] - [3], wobei das stationäre Verhalten des energetischen Funktionals [4] ausgenutzt wird. Diese Methode wird bei elektromagnetischen Vorgängen bisher nur vereinzelt angewandt, nämlich bei der stationären Formulierung skalarer Probleme [5], [6] sowie im vektoriellen Bereich beim Verfahren der finiten Elemente zur Behandlung verlustloser [7] und verlustbehafteter Strukturen [8] . In [9] wurden eine $\vec{E}$- und $\vec{H}$-Feld-Formulierung für verlustbehaftetes anisotropes Medium, in [10] stationäre Ausdrücke für nichtselbst-

adjungierte vektorielle Probleme aus dem energetischen Funktional angegeben. In diesem Kapitel wird

- zunächst die Überführung eines Randwertproblems in eine äquivalente Variationsaufgabe durch das energetische Funktional dargestellt,
- sodann aufgezeigt, daß die in der Literatur für viele Sonderfälle einzeln aufgestellten und bewiesenen stationären Ausdrücke sich systematisch aus diesem Funktional herleiten lassen,
- der Zusammenhang hergestellt zwischen den genannten stationären Ausdrücken und denen aus sogenannten "Reaktionen" gewonnenen [11],
- eine anwendungsorientierte Systematik zur Aufstellung stationärer Ausdrücke für die verschiedenen Anwendungsfälle angegeben, und
- schließlich der Zusammenhang zwischen dem Variationsverfahren und der Momentenmethode hergestellt.

Um eine allgemeine Darstellung der Variationsmethode zu ermöglichen, wird auf die Beschreibung der elektromagnetischen Probleme durch Operatorgleichungen - wie sie von Bresler et al. [13] eingeführt wurde - zurückgegriffen. Die das Feldproblem beschreibenden Maxwellschen Gleichungen lauten in Phasorschreibweise bei einer Zeitabhängigkeit proportional $\exp(j\omega t)$

$$\begin{aligned} -j\omega\varepsilon\vec{E} + \nabla\times\vec{H} &= \vec{J} \quad , \\ \nabla\times\vec{E} + j\omega\mu\vec{H} &= -\vec{M} \quad . \end{aligned} \tag{2.1}$$

Dabei sind $\vec{E}$ und $\vec{H}$ die Vektoren des elektrischen und magnetischen Feldes, $\vec{J}$ und $\vec{M}$ die Vektoren der elektrischen und magnetischen Stromdichte, μ der Permeabilitätstensor und ε der Permittivitätstensor des Mediums. Diese Gleichungen lassen sich durch lineare Operatoren darstellen:

$$\Lambda\vec{F} = j\vec{Q} \tag{2.2}$$

mit dem Operator

$$\Lambda = \omega \begin{vmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \mu \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \nabla\times\mathbf{1} \\ \nabla\times\mathbf{1} & 0 \end{vmatrix} = \omega W + G \ , \tag{2.3}$$

dem Feldvektor

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \vec{E} \\ j\vec{H} \end{pmatrix} \ , \tag{2.4}$$

dem Quellenvektor

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} \vec{J} \\ j\vec{M} \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

und dem Einheitstensor **1** [14]. Der Definitionsbereich $D(\Lambda)$ des Operators Λ wird dabei durch die Randbedingungen festgelegt, denen die Felder des konkreten Randwertproblems genügen müssen.

Zur Formulierung der Energiemethode wird die Einführung eines inneren Produkts benötigt. Hier sollen zwei in der Literatur nebeneinander benutzte Definitionen [13] herangezogen werden. Als hermitesches inneres Produkt zwischen den Vektoren $\vec{A}_1$ und $\vec{A}_2$ wird

$$\langle \vec{A}_1, \vec{A}_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{A}_1 \vec{A}_2^* \, dv = \langle \vec{A}_2, \vec{A}_1 \rangle^* \ , \tag{2.6}$$

als symmetrisches inneres Produkt

$$\langle \vec{A}_1, \vec{A}_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{A}_1 \vec{A}_2 \, dv = \langle \vec{A}_2, \vec{A}_1 \rangle \tag{2.7}$$

bezeichnet, wobei sich die Integration über das betreffende Volumen oder bei zweidimensionalen Problemen über den Querschnitt erstreckt. Zwischen den Symbolen der beiden Definitionen wird nicht unterschieden, weil die hergeleiteten Aussagen für beide inneren Produkte gleichermaßen gelten; wo Unterschiede bestehen, wird dies gesondert erwähnt.

Gilt für einen Operator B

$$<Bp,q> = <p,Bq> \quad ; \; p, \; q \text{ aus } D(B) \; , \tag{2.8}$$

wobei p und q beliebige Funktionen aus dem Definitionsbereich D(B) des Operators B sind, so ist er selbstadjungiert. Für elektromagnetische Vorgänge, bei denen der das Feldproblem beschreibende Operator dieser Bedingung nicht genügt, läßt sich ein adjungierter Operator B^h mit dem hermiteschen inneren Produkt

$$<Bp,q> = <p,B^h q> \quad ; \; p \text{ aus } D(B), \; q \text{ aus } D(B^h), \tag{2.9}$$

und B^s mit dem symmetrischen inneren Produkt

$$<Bp,q> = <p,B^s q> \quad ; \; p \text{ aus } D(B), \; q \text{ aus } D(B^s), \tag{2.10}$$

bilden. Dabei ist der Definitionsbereich $D(B^a)$ des adjungierten Operators $B^a = B^h$, B^s so festgelegt, daß die aus der partiellen Integration herrührenden Randterme verschwinden [14].

Damit läßt sich für einen selbstadjungierten Operator entsprechend Gl. (2.8) zur Gleichung

$$Bu = f \tag{2.11}$$

das energetische Funktional

$$I(v) = <Bv,v> - <v,f> - <f,v> \; ; \; v \text{ aus } D(B) \tag{2.12}$$

definieren [4]. Wird im Funktional (2.12)

$$v = u + \varepsilon u_\varepsilon \tag{2.13}$$

gesetzt, so ist es stationär bei u, wenn für die erste Variation

$$\frac{d}{d\varepsilon} I(u+\varepsilon u_\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} = 0 \; ; \text{ für alle } u_\varepsilon \text{ aus } D(B) \tag{2.14}$$

gilt, wobei ε ein reeller Parameter und u_ε eine beliebige

Funktion aus dem Definitionsbereich D(B) des Operators B ist, und das Verschwinden der ersten Variation für alle u_ε gilt. Die Differenz $I(u+\varepsilon u_\varepsilon) - I(u)$ ist dann von der Ordnung ε^2. Um zu zeigen, daß die stationären Punkte des energetischen Funktionals (2.12) sowohl für das hermitesche als auch für das symmetrische innere Produkt die Lösungen der Operatorgleichung (2.11) sind, wird die erste Variation von I(v) für v aus Gl. (2.13)

$$\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \langle Bu_\varepsilon, u\rangle + \langle Bu, u_\varepsilon\rangle - \langle u_\varepsilon, f\rangle - \langle f, u_\varepsilon\rangle \qquad (2.15)$$

gebildet. Mit der Eigenschaft (2.7) des symmetrischen inneren Produkts folgt weiter

$$\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 2\langle Bu, u_\varepsilon\rangle - 2\langle f, u_\varepsilon\rangle = 2\langle Bu-f, u_\varepsilon\rangle \quad . \qquad (2.16)$$

Dieser Ausdruck verschwindet für alle u_ε aus D(B), wenn Bu-f=0 gilt, d. h. also, wenn u Lösung der Gleichung (2.11) ist. Mit der Eigenschaft (2.6) des hermiteschen inneren Produkts folgt für Gl. (2.15)

$$\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \langle u_\varepsilon, Bu-f\rangle + \langle Bu-f, u_\varepsilon\rangle = 2\mathrm{Re}\{\langle Bu-f, u_\varepsilon\rangle\}. \qquad (2.17)$$

Auch hier gilt, daß die erste Variation für alle u_ε aus D(B) verschwindet, wenn Bu-f=0 ist, also bei den Funktionen u, die Lösung der Gl. (2.11) sind. Die Entscheidung, ob das Funktional an seinen stationären Punkten minimal oder maximal wird, kann anhand der zweiten Variation

$$\frac{1}{2}\varepsilon^2\left.\frac{d^2I}{d\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0} = \varepsilon^2\langle Bu_\varepsilon, u_\varepsilon\rangle \text{ , für alle } u_\varepsilon \text{ aus } D(B) \qquad (2.18)$$

getroffen werden. Ist B ein positiver Operator, d. h. gilt $\langle Bu_\varepsilon, u_\varepsilon\rangle > 0$ für alle u_ε aus D(B), so ist die zweite Variation positiv, und das Funktional nimmt bei der Lösung u der Gleichung Bu=f ein Minimum an. Wenn $\langle Bu_\varepsilon, u_\varepsilon\rangle$ in Abhängigkeit von u_ε positiv oder negativ werden kann, wenn also B indefinit ist, so kann

über die Natur des Extremums bei u keine Aussage gemacht werden. Die wichtige Eigenschaft, daß I stationär bei u ist, gilt weiterhin.

Zur Übertragung auf nichtselbstadjungierte Probleme ist die Einführung eines Funktionals, das von zwei Funktionen abhängt notwendig [1]. Das Funktional

$$I(r,s) = \langle Br,s\rangle - \langle r,g\rangle - \langle f,s\rangle \; ; \; r \text{ aus } D(B),\ s \text{ aus } D(B^a) \qquad (2.19)$$

ist stationär bei den Funktionen $r=u$ und $s=v$, wenn u und v Lösungen der Gleichung $Bu=f$ und der adjungierten Gleichung $B^a v=g$ sind (Beweis: siehe Abschnitt 8.1 im Anhang). Da die zweite Variation des Funktionals $I(u+\varepsilon u_\varepsilon, v+\kappa v_\kappa)$; u, u_ε aus $D(B)$, v, v_κ aus $D(B^a)$

$$\delta^2 I = \frac{1}{2}\varepsilon^2 \frac{\partial^2 I}{\partial \varepsilon^2}\bigg|_0 + \frac{1}{2}\kappa^2 \frac{\partial^2 I}{\partial \kappa^2}\bigg|_0 + \varepsilon\kappa \frac{\partial^2 I}{\partial \varepsilon \partial \kappa}\bigg|_0 = \varepsilon\kappa \langle Bu_\varepsilon, v_\kappa\rangle \qquad (2.20)$$

für beliebige u_ε und v_κ sowohl positiv als auch negativ werden kann, läßt sich wie im Fall des indefiniten Operators nicht sagen, ob I an seinem stationären Punkt ein Maximum oder ein Minimum annimmt.

Die allgemein dargestellte energetische Methode soll nun für zwei Anwendungsfälle konkretisiert werden:

1. Resonatoren; Formulierung von stationären Ausdrücken für die Resonanzfrequenz ω,
2. Wellenleitungen; stationäre Ausdrücke für die Wellenzahl k_z (z = Ausbreitungsrichtung).

Diese elektromagnetischen Probleme werden durch quellenfreie Lösungen der Maxwellschen Gleichungen beschrieben. Sie lassen sich in Operatorschreibweise entsprechend Gl. (2.2) als

$$\Lambda \vec{F} = 0 \qquad (2.21)$$

darstellen. Für diese Gleichungen und die in Bezug auf das

jeweilige innere Produkt adjungierte Gleichung

$$\Lambda^a \vec{F}^a = 0 \qquad (2.22)$$

ergibt sich als stationäres Funktional aus Gl. (2.19)

$$I(\vec{F}_p, \vec{F}_p^a) = \langle \Lambda \vec{F}_p, \vec{F}_p^a \rangle \ , \ \vec{F}_p \text{ aus } D(\Lambda), \ \vec{F}_p^a \text{ aus } D(\Lambda^a) \ . \qquad (2.23)$$

Dabei ist $\vec{F}_p$ eine Probefunktion zur Lösung der Gleichung $\Lambda\vec{F} = 0$ und $\vec{F}_p^a$ eine Probefunktion zur Lösung der adjungierten Gleichung $\Lambda^a\vec{F}^a = 0$. Der selbstadjungierte Fall ist mit $\Lambda^a = \Lambda$ und $\vec{F}_p^a = \vec{F}_p$ in Gl. (2.23) enthalten. Wie oben gezeigt ist dieses Funktional stationär bei $\vec{F}_p = \vec{F}$ und $\vec{F}_p^a = \vec{F}^a$. Da im stationären Punkt die quellenfreien Gleichungen (2.21) und (2.22) erfüllt sind, ergibt sich als Wert des Funktionals $I(\vec{F}_p = \vec{F}, \vec{F}_p^a = \vec{F}^a) = 0$ und damit als allgemeine stationäre Formel zur Bestimmung der Resonanzfrequenz ω bzw. der Wellenzahl k_z die Beziehung

$$\langle \Lambda \vec{F}_p, \vec{F}_p^a \rangle = 0 \ . \qquad (2.24)$$

Ausgangspunkt für die Anwendung auf das Resonatorproblem ist eine Darstellung des dreidimensionalen Feldproblems in $\vec{E}$- und $\vec{H}$-Feldern durch die Operatorgleichung (2.2) mit (2.3)

$$\Lambda\vec{F} = (\omega W + G)\vec{F} = 0 \ . \qquad (2.25)$$

Als stationäre Formel zur Bestimmung der Resonanzfrequenz folgt aus Gl. (2.24)

$$\langle \Lambda \vec{F}_p, \vec{F}_p^a \rangle = \omega \langle W\vec{F}_p, \vec{F}_p^a \rangle + \langle G\vec{F}_p, \vec{F}_p^a \rangle = 0 \qquad (2.26)$$

und daraus

$$\omega = - \frac{\langle G\vec{F}_p, \vec{F}_p^a \rangle}{\langle W\vec{F}_p, \vec{F}_p^a \rangle} \qquad (2.27)$$

mit der hinreichenden Bedingung, daß die Probefunktionen $\vec{F}_p$ und $\vec{F}_p^a$ die Randbedingungen erfüllen *). Je nach Anwendungsfall kann es sinnvoll sein, den stationären Ausdruck (2.26) oder (2.27) zu benutzen. Im Anhang, Abschnitt 8.2 wird gezeigt, daß aus dem stationären Verhalten von Gl. (2.26) auch stationäres Verhalten für Gl. (2.27) folgt. Mit Hilfe dieser stationären Ausdrücke kann dann eine gute Näherung für ω errechnet werden, wenn für die Probefunktionen physikalisch sinnvolle Annahmen gemacht werden können.

Zur Herleitung einer konkreten stationären Formel aus Gl. (2.27) ist insbesondere die Betrachtung des adjungierten Problems notwendig. Je nach Wahl des inneren Produkts, die in Gl. (2.27) noch frei ist, ergibt sich ein anderes adjungiertes Problem. Hier zeigt sich nun die Nützlichkeit der Einführung der beiden inneren Produkte Gl. (2.6) und Gl. (2.7), es läßt sich nämlich in jedem Fall eines so wählen, daß das adjungierte Problem physikalisch sinnvoll ist und in einem gewissen Zusammenhang zum Originalproblem steht. Tabelle 1 zeigt in der Übersicht alle sich ergebenden stationären Ausdrücke und gibt jeweils den Zusammenhang mit der Literatur an. Wie die Gegenüberstellung in Tabelle 1 zeigt, führen bei Verlustfreiheit beide inneren Produkte auf dieselben Ausdrücke. Es ist daher in diesem Fall zweckmäßig, das hermitesche innere Produkt zu wählen, da die Operatoren dann stets selbstadjungiert sind. Im verlustbehafteten Medium führt nur die Wahl des symmetrischen inneren Produkts auf ein physikalisch sinnvolles adjungiertes Problem, nämlich auf das Feldproblem im Medium mit transponiertem Tensor. Im Fall des magnetisierten Ferritmediums entspricht dies der Umkehr des äußeren Magnetfelds. Für alle hier hergeleiteten Ausdrücke ist wiederum hinreichend, daß die Probefunktionen die Rand- und Stetigkeitsbedingungen erfüllen *). Die Möglichkeit, durch Hinzufügung zusätzlicher Terme in den stationären Ausdrücken allgemeinere Probefunktionen zuzulassen - siehe z. B. [17] - soll hier nicht weiter diskutiert werden, zumal dies für die vorgesehene Anwendung in Abschnitt 3 nicht notwendig ist. Die Überprüfung,

*) Diese Bedingung ist gelegentlich strenger als notwendig, siehe Abschnitt 8.1 im Anhang

Tab. 1: Stationäre Ausdrücke für die Resonanzfrequenz. Angegeben sind die adjungierten Probleme (1), die aus Gl. (2.27) und Gl. (2.29) folgenden Ausdrücke (2) und (3) für hermitesches (H) und symmetrisches (S) inneres Produkt.

ISOTROP	verlustfrei
H(1)	Selbstadjungiert
H(2)	$\omega = -j\dfrac{2\int \vec{E}\nabla\times\vec{H}\ dv}{\int(\varepsilon\lvert\vec{E}\rvert^2 + \mu\lvert\vec{H}\rvert^2)dv}$
H(3)	$\omega^2 = \dfrac{\int\mu^{-1}\lvert\nabla\times\vec{E}\rvert^2\ dv}{\int\varepsilon\lvert\vec{E}\rvert^2\ dv}$
S(1)	Selbstadjungiert. Mit H(1) gilt: $\Lambda^* = \Lambda$, mit $\Lambda\vec{F} = 0$ folgt $\Lambda\vec{F}^* = 0$, daher $\vec{F}^* = \vec{F}$, damit ergeben sich dieselben Ausdrücke, wie beim hermiteschen inneren Produkt.
	verlustbehaftet
H(1)	Feldproblem im Medium mit $\mu^a = \mu^*$, d. h. im "verstärkenden" Medium (z. B. $\mu = \mu' - j\mu''$ mit $\mu''<0$).
S(1)	Selbstadjungiert.
S(2)	$\omega = -j\dfrac{2\int \vec{E}\nabla\times\vec{H}\ dv}{\int(\varepsilon\vec{E}^2 - \mu\vec{H}^2)dv}$
S(3)	$\omega^2 = \dfrac{\int\mu^{-1}(\nabla\times\vec{E})^2\ dv}{\int\varepsilon\vec{E}^2\ dv}$ |16|
ANISOTROP	verlustfrei
H(1)	Selbstadjungiert.
H(2)	$\omega = j\dfrac{\int(\vec{H}^*\nabla\times\vec{E} - \vec{E}^*\nabla\times\vec{H})dv}{\int(\vec{E}^*\boldsymbol{\varepsilon}\vec{E} + \vec{H}^*\boldsymbol{\mu}\vec{H})dv}$
H(3)	$\omega^2 = \dfrac{\int\nabla\times\vec{E}^*\boldsymbol{\mu}^{-1}\nabla\times\vec{E}\ dv}{\int\vec{E}^*\boldsymbol{\varepsilon}\vec{E}\ dv}$ |15|
S(1)	Feldproblem im Medium mit transponiertem Tensor. Mit H(1) gilt: $\Lambda^a = \Lambda^*$ (wegen $\boldsymbol{\mu}^a = \boldsymbol{\mu}^T$). Aus $\Lambda^a\vec{F}^a = 0$, $\Lambda^*\vec{F}^a = 0$ und $\Lambda^*\vec{F}^* = 0$ folgt: $\vec{F}^a = \vec{F}^*$, daher ergeben sich dieselben Ausdrücke, wie beim hermiteschen inneren Produkt.
	verlustbehaftet
H(1)	Feldproblem im verstärkenden Medium.
S(1)	Feldproblem im Medium mit transponiertem Tensor, Lösung $(\vec{E}^a, j\vec{H}^a)$
S(2)	$\omega = -j\dfrac{\int(\vec{E}^a\nabla\times\vec{H} + \vec{H}^a\nabla\times\vec{E})dv}{\int(\vec{E}^a\boldsymbol{\varepsilon}\vec{E} - \vec{H}^a\boldsymbol{\mu}\vec{H})dv}$
S(3)	$\omega^2 = \dfrac{\int\nabla\times\vec{E}^a\boldsymbol{\mu}^{-1}\nabla\times\vec{E}\ dv}{\int\vec{E}^a\boldsymbol{\varepsilon}\vec{E}\ dv}$ |23|

welchen Rand- und Stetigkeitsbedingungen ein stationärer Ausdruck genügen muß, geschieht durch Berechnung der ersten Variation und die Forderung ihres Verschwindens.

Soll der stationäre Ausdruck nur das elektrische Feld enthalten, so läßt sich der entsprechende Operator Λ_E durch einfache Umformung mit Hilfe der Maxwellschen Gleichungen (2.1) gewinnen:

$$\Lambda_E \vec{E} = (\omega\varepsilon - \frac{1}{\omega}\nabla\times\mu^{-1}\nabla\times\mathbf{1})\vec{E} = (\omega\varepsilon - \frac{1}{\omega}G)\vec{E} = 0 \ . \qquad (2.28)$$

Mit dieser Darstellung des Feldproblems kann über Gl. (2.24) wieder eine stationäre Formel für die Resonanzfrequenz angegeben werden:

$$\omega^2 = \frac{\langle G\vec{E}_p, \vec{E}^a_p\rangle}{\langle \varepsilon\vec{E}_p, \vec{E}^a_p\rangle} \ . \qquad (2.29)$$

Auch hier gelten die gleichen Überlegungen bezüglich der Wahl des inneren Produkts und des adjungierten Problems wie oben, die sich ergebenden stationären Ausdrücke sind ebenfalls in Tabelle 1 aufgeführt. Alle Integrationen in Tabelle 1 erstrecken sich über das Volumen des Resonators.

Durch Ausnutzung der Dualität der Maxwellschen Gleichungen in $\vec{E}$ und $\vec{H}$ kann aus Gl. (2.29) durch geeignete Substitution [16] eine entsprechende Formulierung für ω^2 in $\vec{H}$ gewonnen werden.

Ausgangspunkt zur Formulierung stationärer Ausdrücke für die Wellenzahl k_z einer in z-Richtung homogenen Wellenleitung ist das zweidimensionale Feldproblem in den transversalen Koordinaten x_1 und x_2 für den Feldvektor

$$\vec{F}(x_1,x_2,z) = \vec{F}_o(x_1,x_2)\exp(-jk_z z) \ . \qquad (2.30)$$

Der Index "o" bei $\vec{F}_o$ wird im weiteren fortgelassen und unter $\vec{F}$ ein Vektor in x_1 und x_2 verstanden. Die quellenfreien Max-

wellschen Gleichungen

$$\begin{aligned} \omega\varepsilon\vec{E} + \nabla_t \times j\vec{H} - jk_z\vec{u}_z \times j\vec{H} &= 0 \\ \omega\mu j\vec{H} + \nabla_t \times \vec{E} - jk_z\vec{u}_z \times \vec{E} &= 0 \end{aligned} \qquad (2.31)$$

lassen sich dann in Operatorschreibweise formulieren:

$$\Lambda_t\vec{F} = (L_t - k_z G_z)\vec{F} = 0 \qquad (2.32)$$

mit

$$L_t = \omega W + G_t = \omega\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \nabla_t \times 1 \\ \nabla_t \times 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2.33)$$

und

$$G_z = \begin{pmatrix} 0 & j\vec{u}_z \times 1 \\ j\vec{u}_z \times 1 & 0 \end{pmatrix} . \qquad (2.34)$$

Dabei sind ∇_t der transversale Anteil des Nabla-Operators und $\vec{u}_z$ der Einheitsvektor in z-Richtung. Unter der Voraussetzung, daß die Berandung der Wellenleitung ideal leitend ist, lassen sich mit Hilfe der inneren Produkte (2.6) und (2.7) folgende Aussagen über die adjungierten Operatoren machen:

Medium verlustfrei, anisotrop, inhomogen: Bei Verwendung des hermiteschen inneren Produkts sind $\begin{cases} L_t = L_t^h \\ G_z = G_z^h \end{cases}$,

Medium verlustbehaftet, isotrop, inhomogen: Bei Verwendung des symmetrischen inneren Produkts sind $\begin{cases} L_t = L_t^s \\ G_z = -G_z^s \end{cases}$.

Die Integration in der Definition der inneren Produkte erstreckt sich hier über den Querschnitt der Wellenleitung. Unter Benutzung dieser Zusammenhänge läßt sich für den Adjungierten des Operators $\Lambda_t = (L_t - k_z G_z)$ im einzelnen angeben:

a) Im verlustfreien, anisotropen, inhomogenen Medium gilt mit $L_t = L_t^h$

$$\Lambda_t^a \vec{F}^a = (L_t - k_z^* G_z)\vec{F}^a = 0 \ . \qquad (2.35)$$

Die Lösung $\vec{F}^a$ der adjungierten Gleichung ist also die Lösung des ursprünglichen Problems zur Wellenzahl k_z^*. Bei reellem k_z ist das Problem selbstadjungiert.

b) Im verlustbehafteten, isotropen, inhomogenen Medium hat man mit $L_t = L_t^s$

$$\Lambda_t^a \vec{F}^a = (L_t + k_z G_z)\vec{F}^a = 0 \ . \qquad (2.36)$$

Die Lösung dieses adjungierten Problems ist die Lösung des ursprünglichen Problems zur Wellenzahl $-k_z$, also die rücklaufende Welle; das Problem ist daher stets nichtselbstadjungiert. Diese Eigenschaft steht im Gegensatz zu der des Operators im dreidimensionalen Resonatorfall: dort war der entsprechende Operator selbstadjungiert (s. Tabelle 1).

In Erweiterung von a) steht noch das verlustbehaftete, anisotrope, inhomogene Medium aus. Hier werden durch die adjungierten Operatoren neue Feldprobleme beschrieben: beim hermiteschen inneren Produkt wird ein Feldproblem in einem "verstärkenden" Medium (z. B. $\mu = \mu' - j\mu''$, mit $\mu'' < 0$) definiert. Die Benutzung dieses inneren Produkts scheint daher aus physikalischen Gründen nicht sinnvoll. Beim symmetrischen inneren Produkt beschreibt die Lösung der adjungierten Gleichung

$$\Lambda_t^a \vec{F}^a = (L_t^a + k_z G_z)\vec{F}^a = 0 \qquad (2.37)$$

diejenige Welle, die sich in einem Medium mit transponiertem Tensor mit der Wellenzahl $-k_z$ ausbreitet: Im Fall eines magnetisierten Ferritmediums ist dies die rücklaufende Welle bei Umkehr des äußeren Magnetfelds. Durch Einbeziehung dieses adjungierten Feldproblems läßt sich ein stationärer Ausdruck

aus der Gl. (2.24) entsprechenden Gleichung

$$\langle \Lambda_t \vec{F}_p, \vec{F}^a_p \rangle = 0 \tag{2.38}$$

gewinnen

$$k_z = \frac{\langle L_t \vec{F}_p, \vec{F}^a_p \rangle}{\langle G_z \vec{F}_p, \vec{F}^a_p \rangle} \quad . \tag{2.39}$$

Die für die drei Fälle sich ergebenden Formulierungen sind in Tabelle 2 dargestellt.

Um einen stationären Ausdruck nur in $\vec{E}$-Feldern zu erhalten, wird die aus den Maxwellschen Gleichungen folgende Wellengleichung mit

$$\nabla = \nabla_t + \vec{u}_z \frac{\partial}{\partial z} = \nabla_t - jk_z \vec{u}_z \tag{2.40}$$

umgeformt in

$$\Lambda_E \vec{E} = \nabla_t \times \mu^{-1} \nabla_t \times \vec{E} - jk_z (\vec{u}_z \times \mu^{-1} \nabla_t \times \vec{E} + \nabla_t \times \mu^{-1} \vec{u}_z \times \vec{E}) - \\ - k_z^2 \vec{u}_z \times \mu^{-1} \vec{u}_z \times \vec{E} - \omega^2 \varepsilon \vec{E} = 0 \ . \tag{2.41}$$

Der Operator Λ_E hat für entsprechende Fälle die gleichen Eigenschaften wie der Operator Λ_t in Gl. (2.32). Mit Gl. (2.41) liefert Gl. (2.38)

$$\langle \nabla_t \times \mu^{-1} \nabla_t \times \vec{E}_p, \vec{E}^a_p \rangle - jk_z \langle \vec{u}_z \times \mu^{-1} \nabla_t \times \vec{E}_p + \nabla_t \times \mu^{-1} \vec{u}_z \times \vec{E}_p, \vec{E}^a_p \rangle - \\ - k_z^2 \langle \vec{u}_z \times \mu^{-1} \vec{u}_z \times \vec{E}_p, \vec{E}^a_p \rangle - \omega^2 \langle \varepsilon \vec{E}_p, \vec{E}^a_p \rangle = 0 \ . \tag{2.42}$$

Die je nach Anwendungsfall und Wahl des inneren Produkts sich ergebenden stationären Ausdrücke sind ebenfalls in Tabelle 2 aufgeführt. Auch hier ist wieder hinreichend, daß die Probefunktionen die Rand- und Stetigkeitsbedingungen erfüllen *).

*) siehe Fußnote S. 10

Tab. 2: Stationäre Ausdrücke für die Wellenzahl k_z. Angegeben sind die adjungierten Probleme (1), die aus Gl. (2.39) und Gl. (2.42) folgenden Ausdrücke (2) und (3) für hermitesches (H) und symmetrisches (S) inneres Produkt.

ISOTROP	verlustfrei

H(1) Selbstadjungiert

H(2)

$$k_z = \frac{\omega\int(\varepsilon|\vec{E}|^2 + \mu|\vec{H}|^2)dA + j\int(\vec{H}\nabla_t\times\vec{E}^* - \vec{H}^*\nabla_t\times\vec{E})dA}{\int(\vec{H}^*\vec{u}_z\times\vec{E} + \vec{H}\vec{u}_z\times\vec{E}^*)dA}$$

H(3)

$$\int\{\omega^2\varepsilon|\vec{E}|^2 - \mu^{-1}|\nabla_t\times\vec{E}|^2 + jk_z\mu^{-1}(\nabla_t\times\vec{E}^*\cdot\vec{u}_z\times\vec{E} - \nabla_t\times\vec{E}\cdot\vec{u}_z\times\vec{E}^*) - k_z^2\mu^{-1}|\vec{E}_t|^2\}dA = 0 \qquad [19]$$

S(1) Rücklaufende Welle, mit Reflexionssymmetrie Gl. (2.49): $L_t^a = L_t^* = L_t$, daher $(L_t + k_zG_z)\vec{F}^- = 0$ und $\left[(L_t - k_zG_z)\vec{F}^+\right]^* = (L_t + k_zG_z)\vec{F}^{+*} = 0$; es folgt: $\vec{F}^- = \vec{F}^{+*}$. Dann ergeben sich dieselben stationären Ausdrücke wie beim hermiteschen inneren Produkt.

verlustbehaftet

H(1) Feldproblem im verstärkenden Medium.

S(1) Rücklaufende Welle, mit Reflexionssymmetrie.

S(2)

$$k_z = \frac{\omega\int(\varepsilon\vec{E}^+\vec{E}^- - \mu\vec{H}^+\vec{H}^-)dA + j\int(\vec{H}^+\nabla_t\times\vec{E}^- + \vec{H}^-\nabla_t\times\vec{E}^+)dA}{\int(\vec{H}^+\vec{u}_z\times\vec{E}^- - \vec{H}^-\vec{u}_z\times\vec{E}^+)dA} \qquad [16]$$

S(3)

$$\int\{\omega^2\varepsilon\vec{E}^+\vec{E}^- - \mu^{-1}\nabla_t\times\vec{E}^+\cdot\nabla_t\times\vec{E}^- + jk_z\mu^{-1}(\nabla_t\times\vec{E}^-\cdot\vec{u}_z\times\vec{E}^+ - \nabla_t\times\vec{E}^+\cdot\vec{u}_z\times\vec{E}^-) - k_z^2\mu^{-1}\vec{E}_t^2\}dA = 0 \qquad [16]$$

Tabelle 2: Fortsetzung

ANISOTROP	verlustfrei

H(1) Selbstadjungiert

H(2)

$$k_z = \frac{\omega\int(\vec{E}^*\varepsilon\vec{E} + \vec{H}^*\mu\vec{H})dA + j\int(\vec{H}\nabla_t\times\vec{E}^* - \vec{H}^*\nabla_t\times\vec{E})dA}{\int(\vec{H}^*\vec{u}_z\times\vec{E} + \vec{H}\vec{u}_z\times\vec{E}^*)dA} \qquad [15]$$

H(3)

$$\int\{\omega^2\vec{E}^*\varepsilon\vec{E} - \nabla_t\times\vec{E}^*\mu^{-1}\nabla_t\times\vec{E} + jk_z(\nabla_t\times\vec{E}^*\mu^{-1}\vec{u}_z\times\vec{E} - \vec{u}_z\times\vec{E}^*\mu^{-1}\nabla_t\times\vec{E}) - k_z^2\vec{u}_z\times\vec{E}^*\mu^{-1}\vec{u}_z\times\vec{E}\}dA = 0 \qquad [15]$$

S(1) Rücklaufende Welle im Medium mit transponiertem Tensor. Aus Gl. (2.33) folgt $L_t^a = L_t^*$, damit $\{(L_t^a + k_z G_z)\vec{F}^a\}^* = (L_t - k_z G_z)\vec{F}^{a*}$, mit Gl. (2.32) $(L_t - k_z G_z)\vec{F} = 0$ folgt dann: $\vec{F}^a = \vec{F}^*$. Dann ergeben sich dieselben stationären Ausdrücke wie beim hermiteschen inneren Produkt.

verlustbehaftet

H(1) Feldproblem im verstärkenden Medium.

S(1) Rücklaufende Welle im Medium mit transponiertem Tensor, Lösung $(\vec{E}^a, j\vec{H}^a)$.

S(2)

$$k_z = \frac{\omega\int(\vec{E}^a\varepsilon\vec{E} - \vec{H}^a\mu\vec{H})dA + j\int(\vec{H}\nabla_t\times\vec{E}^a + \vec{H}^a\nabla_t\times\vec{E})dA}{\int(\vec{H}\vec{u}_z\times\vec{E}^a - \vec{H}^a\vec{u}_z\times\vec{E})dA} \qquad [18]$$

S(3)

$$\int\{\omega^2\vec{E}^a\varepsilon\vec{E} - \nabla_t\times\vec{E}^a\mu^{-1}\nabla_t\times\vec{E} + jk_z(\nabla_t\times\vec{E}^a\mu^{-1}\vec{u}_z\times\vec{E} - \vec{u}_z\times\vec{E}^a\mu^{-1}\nabla_t\times\vec{E}) - k_z^2\vec{u}_z\times\vec{E}^a\mu^{-1}\vec{u}_z\times\vec{E}\}dA$$

Ein anderes in der Literatur mit Erfolg angewandtes systematisches Verfahren zur Herleitung stationärer Ausdrücke ist das Reaktionskonzept [11],[16]. Im isotropen Medium wird dabei der Ausdruck

$$R = \int(\vec{E}\vec{J} - \vec{H}\vec{M})dv \tag{2.43}$$

als Reaktion eines Feldes $\vec{E}$, $\vec{H}$ mit beliebigen Quellen $\vec{J}$, $\vec{M}$ bezeichnet. Sind $\vec{J}$, $\vec{M}$ die Quellen des Feldes $\vec{E}$, $\vec{H}$, so bezeichnet R die Selbstreaktion. Insbesondere zur Berechnung der Wellenzahl von Wellen auf Streifenleitungsstrukturen auf dielektrischem Substrat und von dielektrischen Wellenleitungen wurden stationäre Ausdrücke aus Reaktionen hergeleitet [19], [20] oder herangezogen [21]. Nachdem hier für alle denkbaren Anwendungsfälle ein systematisches Verfahren zur Herleitung stationärer Ausdrücke über die Energiemethode angegeben wurde, stellt sich die Frage nach dem Zusammenhang dieser beiden Vorgehensweisen.

Für ein quellenfreies Feldproblem im isotropen, verlustbehafteten Medium ergibt sich für einen Parameter des Feldes (z. B. k_z oder ω) aus der Selbstreaktion der stationäre Ausdruck

$$\int(\vec{E}_p\vec{J}_p - \vec{H}_p\vec{M}_p)dv = 0 \tag{2.44}$$

[16], [27], wobei $\vec{E}_p$, $\vec{H}_p$ Probefunktionen für die Feldverteilung und $\vec{J}_p$, $\vec{M}_p$ die dazu gehörenden Probequellen bezeichnen. Die Energiemethode liefert für einen dreidimensionalen selbstadjungierten Fall mit $\vec{F}_p^a = \vec{F}_p$ nach Gl. (2.24) einen stationären Ausdruck der Form

$$\langle \Lambda\vec{F}_p, \vec{F}_p \rangle = 0 \ . \tag{2.45}$$

Um den Zusammenhang mit dem Reaktionskonzept zu erhalten, soll im folgenden stets das symmetrische innere Produkt gemeint sein. Mit der aufgrund der Maxwellschen Gleichungen (2.2) zur Probefunktion $\vec{F}_p$ gehörenden Quellenverteilung

$$j\vec{Q}_p = \Lambda\vec{F}_p \tag{2.46}$$

läßt sich Gl. (2.45) über

$$\langle \vec{Q}_p, \vec{F}_p \rangle = 0 \tag{2.47}$$

schließlich auf die Form

$$\int (\vec{E}_p \vec{J}_p - \vec{H}_p \vec{M}_p) dv = 0 \tag{2.48}$$

bringen. Die Identität dieser Gleichung mit Gl. (2.44) zeigt die Gleichwertigkeit beider Methoden für dreidimensionale selbstadjungierte Feldprobleme im isotropen Medium.

Für das zweidimensionale Wellenleitungsproblem ist in Gln. (2.32) und (2.36) gezeigt worden, daß ein selbstadjungierter Fall nicht existiert. Als stationärer Ausdruck der Energiemethode muß dann Gl. (2.38) unter Einbeziehung des adjungierten Problems herangezogen werden. Als Lösung des adjungierten Problems war die rücklaufende Welle identifiziert worden. Wegen der vorliegenden Reflexionssymmetrie [16] besteht zwischen den Feldern der hin- (+) und der rücklaufenden (-) Welle der Zusammenhang

$$\begin{aligned} \vec{E}_t^- &= \vec{E}_t^+ , \quad E_z^- = -E_z^+ \\ \vec{H}_t^- &= -\vec{H}_t^+ , \quad H_z^- = H_z^+ \end{aligned} \tag{2.49}$$

oder

$$\vec{F}^- = S\vec{F}^+ = S\vec{F} \tag{2.50}$$

mit

$$S = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & -\sigma \end{pmatrix} , \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{2.51}$$

Damit wird aus dem stationären Ausdruck Gl. (2.38)

$$\langle \Lambda_t \vec{F}_p, S\vec{F}_p \rangle = 0 \tag{2.52}$$

und mit Gl. (2.46)

$$\langle \vec{Q}_p, \mathcal{O}\vec{F}_p \rangle \quad . \tag{2.53}$$

Diese Darstellung ist identisch mit der modifizierten Reaktion, wie sie von Rumsey [11] angegeben wurde:

$$\int (\vec{J}\sigma\vec{E} + \vec{M}\sigma\vec{H})dA = 0 \ . \tag{2.54}$$

Wie die Herleitung aus der Energiemethode zeigt, ergibt sich die Notwendigkeit zur Modifikation der Reaktion aus der Tatsache, daß das zweidimensionale Wellenleitungsproblem - im Gegensatz zum dreidimensionalen Resonatorproblem - nichtselbstadjungiert ist. Die Nichtbeachtung dieser Tatsache führt wie in [22] und [20] auf Ausdrücke, die bei der Lösung der Maxwellschen Gleichung im allgemeinen nicht stationär sind, was im Anhang Abschnitt 8.3 näher erläutert wird.

Bei verlustbehafteter, anisotroper, inhomogener Füllung der Wellenleitung ist das adjungierte Problem nach Gl. (2.37) das Feldproblem der rücklaufenden Welle im Medium mit transponiertem Tensor, und es läßt sich kein allgemeiner Zusammenhang zwischen $\vec{F}$ und $\vec{F}^a$, wie z. B. zwischen $\vec{F}^-$ und $\vec{F}^+$ in Gl. (2.50) angeben. Daher bleibt als stationärer Ausdruck der Energiemethode die Beziehung (2.38), die sich mit Gl. (2.46) als

$$\langle \vec{Q}_p, \vec{F}_p^a \rangle = 0 \tag{2.55}$$

und in Feldern und Quellen ausgedrückt als

$$\int (\vec{E}_p^a \vec{J}_p - \vec{M}_p \vec{H}_p^a)dA = 0 \tag{2.56}$$

schreiben läßt. Dabei ist $\vec{Q}_p$ die Quelle, die zu einer Probefunktion $\vec{F}_p$ des ursprüglichen Problems gehört und $\vec{F}_p^a$ eine Probefunktion für die Lösung des adjungierten Problems. Gleichung (2.56) ist formal identisch mit dem Ausdruck für die Reaktion, den Rumsey für den dreidimensionalen Fall eines anisotropen Mediums

angegeben hat [12]. Allerdings geht daraus nicht hervor, ob und ggf. wie der Ausdruck von Rumsey auch auf das zweidimensionale Problem der Wellenleitung anzuwenden ist. Die für die verschiedenen Fälle unterschiedliche Definition der Reaktion stellt eine gewisse Unsicherheit und mögliche Fehlerquelle dar. Die Herleitung der stationären Ausdrücke aus der Energiemethode ist dagegen eindeutig, da sie von dem das vorliegende Problem beschreibenden Operator und seinen Eigenschaften ausgeht, wie in Tabellen 1 und 2 gezeigt.

Die oben für vektorielle Probleme entwickelte Anwendung des energetischen Funktionals läßt sich natürlich auch auf skalare Probleme übertragen. Collin [24] hat einen stationären Ausdruck für die Phasenkonstante ß einer mit Ferrit gefüllten Hohlleitung unter der Forderung, daß die zeitlichen Mittelwerte der elektrischen und magnetischen Energie gleich sind, aus dem skalaren Potential des Problems hergeleitet. Auch diese Formel läßt sich aus Gl. (2.38) $\langle L_t\phi,\phi\rangle = 0$ gewinnen, wobei L_t der selbstadjungierte Operator der Differentialgleichung des skalaren Potentials ϕ ist.

Eine sinnvolle Nutzung der stationären Ausdrücke ist nur möglich, wenn für die Lösung des Problems physikalisch vernünftige Annahmen gemacht werden können. Ist dies nicht möglich, oder wird eine höhere Genauigkeit verlangt, dann kann die Lösung auf numerischem Weg bestimmt werden. Dazu können Projektionsverfahren herangezogen werden, die in der Literatur als Galerkin- oder Momentenmethode bekannt sind [23]. Grundgedanke dieser Verfahren ist, die Operatorgleichung auf ein endliches System von linearen Gleichungen zu reduzieren und dieses dann exakt zu lösen. Dazu wird in der Operatorgleichung

$$Bu = f \tag{2.11}$$

in der B ein Differential- oder Integraloperator, f die gegebene und u die gesuchte Funktion sind, die unbekannte Lösung durch einen Satz linear unabhängiger Funktionen $\{u_n\}$ angenähert

$$\tilde{u} = \sum_n a_n u_n \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.57}$$

und auf beiden Seiten der Gl. (2.11) das innere Produkt mit linear unabhängigen Funktionen eines im allgemeinen anderen Satzes von Funktionen $\{v_n\}$ entsprechend Gl. (2.6) oder (2.7) gebildet. Dies führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\sum_n a_n \langle Bu_n, v_m \rangle = \langle f, v_m \rangle \quad , \quad n, m = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.58}$$

zur Bestimmung der a_n aus Gl. (2.57). Dieses Gleichungssystem entspricht einer Projektion der Gl. (2.11) auf einen endlichdimensionalen Unterraum, der von den $\{u_n\}$ aufgespannt wird [1]. Gewöhnlich werden die $\{u_n\}$ als Basisfunktionen und die $\{v_n\}$ als Gewichtsfunktionen bezeichnet.

Bei einem anderen Weg zur Lösung der Operatorgleichung (2.11), wobei B auch nichtselbstadjungiert sein darf, wird das stationäre Funktional Gl. (2.19) herangezogen. Mit Hilfe von zwei Sätzen von linear unabhängigen Funktionen $\{U_n\}$ aus D(B) und $\{V_n\}$ aus $D(B^a)$ kann durch das Rayleigh-Ritz Verfahren [1], [16] ein lineares Gleichungssystem der Form

$$\sum_n a_n \langle BU_n, V_m \rangle = \langle f, V_m \rangle \quad , \quad n, m = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.59}$$

zur Bestimmung einer genäherten Lösung

$$\tilde{u} = \sum_n a_n U_n \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.60}$$

hergeleitet werden. Dieses Gleichungssystem ist identisch mit dem der Projektionsmethode Gl. (2.58), wenn dort die Basis- und Gewichtsfunktionen so gewählt werden, daß sie aus dem Definitionsbereich des Operators B bzw. des adjungierten Operators B^a kommen, d. h. die entsprechenden Randbedingungen erfüllen [3].

3. Randwertproblem für gekoppelte Leitungen

3.1 Allgemeine Überlegungen

Die im folgenden untersuchte Mikrostreifenleitungsstruktur besteht aus einer metallischen Grundplatte, einem Ferritsubstrat der Dicke h und mehreren Streifenleitern unterschiedlicher Breite w_1, w_2, w_3,... (Bild 1). Ein statisches Magnetfeld ist senk-

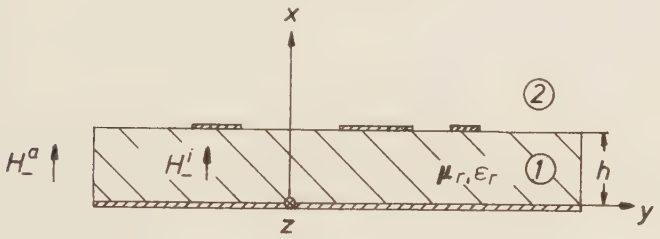


Bild 1. Gekoppelte Mikrostreifenleitungen auf magnetisiertem Ferritsubstrat.

recht zum Substrat und zur Ausbreitungsrichtung angelegt. Die Untersuchung soll sich zunächst auf die Behandlung von zwei gekoppelten Leitungen beschränken, eine Erweiterung des Verfahrens auf die Berechnung von mehr als zwei Leitungen wird in einem späteren Abschnitt angegeben.

Zur mathematischen Behandlung werden folgende Idealisierungen eingeführt: Die Leitungsstruktur ist in y- und z-Richtung nach beiden Seiten unendlich ausgedehnt, Ferritsubstrat und metallische Leiter werden als verlustlos angenommen, die Streifenleiter haben vernachläßigbar kleine Dicke und der Ferrit ist durch das statische Magnetfeld zur Sättigung magnetisiert. Die magnetischen Eigenschaften des Ferrits werden dann durch den Permeabilitätstensor

$$\underline{\mu}_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -j\kappa \\ 0 & j\kappa & \mu \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

beschrieben [25]. Wegen der angenommenen Verlustlosigkeit gilt für diesen Tensor die Beziehung

$$\mu_r = \mu_r^{*T} \quad , \tag{3.2}$$

dabei bedeutet T transponiert.

Zur Berechnung gekoppelter Streifenleitungen auf isotropem Substrat sind in den letzten Jahren eine Vielzahl von Methoden entwickelt und herangezogen worden [21], [26] - [30], die sich in ihrer analytischen Komplexität und daher auch in ihrer Aussagekraft z. T. erheblich unterscheiden. Bei den Untersuchungen von Einzelleitungen auf magnetisiertem Ferritsubstrat sind ebenfalls Berechnungen auf der Grundlage verschiedener Modelle durchgeführt worden [31] - [34]. Eine gegenüberstellende Betrachtung dieser Methoden zeigt, daß die Formulierung einer Integralgleichung für den Strom auf der Leitung und die Anwendung der Momentenmethode im Ortsbereich [30] oder im Ortsfrequenzbereich [29], [33] die weitestgehenden Lösungen dieses Problems darstellen, wobei lediglich die oben genannten Idealisierungen vorausgesetzt werden müssen. Aus der Lösung können die Dispersion der Wellentypen, die Stromverteilung auf der Leitung und die Feldverteilung im Querschnitt der Wellenleitung angegeben werden.

Nach der in Abschnitt 2 gegebenen Übersicht über die Variationsverfahren können auch für den Fall des magnetisierten Ferritsubstrats stationäre Ausdrücke für die Wellenzahl k_z gebildet werden. Während die Methode der stationären Darstellung bei entsprechenden Problemen auf dielektrischem Substrat die in Abschnitt 2 erwähnte weite Verbreitung erreicht hat, ist für Mikrostreifenleitungen auf magnetisiertem Ferritsubstrat die Anwendung eines stationären Ausdrucks lediglich für ein sehr stark vereinfachtes Modell bekannt [35], [36]. Nachdem über die Lösung mit Hilfe der Momentenmethode die Stromverteilung auf den Streifen bekannt ist, kann mit Hilfe der dort ebenfalls formulierten Darstellung des Feldproblems und der im Abschnitt 2 durchgeführten Analyse ohne viel Mehraufwand ein stationärer Ausdruck für die Wellenzahl k_z aufgestellt werden. Zuvor sollen hier noch einige allgemeine

Überlegungen bezüglich der zu erwartenden Lösung angestellt werden. Dabei wird die Grundwelle unterstellt, für höhere Wellentypen gelten entsprechende Überlegungen.

Die Anordnung von zwei Streifen auf dem gemeinsamen Ferritsubstrat stellt ein System von zwei gekoppelten Leitungen dar. In diesem Leitungssystem kann sich eine Welle nicht mehr allein auf einer Leitung ausbreiten, sie ist stets mit einer Welle auf der anderen Leitung gekoppelt. Das Leitungssystem läßt sich aber durch zwei Wellentypen beschreiben, die unabhängig voneinander existieren und sich längs des Leitungssystems ausbreiten. Das sind die Eigenlösungen der Maxwellschen Gleichungen für das durch die gekoppelten Leitungen definierte Randwertproblem (Normaltypen). Die Wellenzahlen dieser beiden Wellen sind im allgemeinen unterschiedlich und von denen der beiden ungekoppelten Leitungen verschieden [37]. Das System der gekoppelten Leitungen läßt sich durch diese Wellentypen beschreiben, ihre Berechnung steht im Vordergrund dieses und des folgenden Abschnitts.

Für Wellenleitungen mit isotropem Dielektrikum existiert zu jedem Wellentyp mit der Wellenzahl k_z auch ein Typ mit der Wellenzahl $-k_z$, diese Wellenleitungen sind bidirektional. Bei Leitungen mit magnetisiertem Ferrit gilt dies nicht mehr uneingeschränkt. Allerdings kann anhand einer von McIsaac [38] durchgeführten allgemeinen Betrachtung für den hier betrachteten Fall bereits ohne Lösung des Randwertproblems gesagt werden:

- die durch die Verkopplung zweier Streifenleiter gleicher Breite entstehende Wellenleitung ist bidirektional,
- bei ungleicher Breite beider Streifenleiter ist die Wellenleitung nichtbidirektional, d. h. zu keinem Wellentyp mit der Wellenzahl k_z gibt es einen entsprechenden mit der Wellenzahl $-k_z$. Hier muß also die Berechnung für beide Ausbreitungsrichtungen erfolgen.

Für eine symmetrische Leitungsstruktur aus zwei Streifenleitern gleicher Breite auf isotropem Substrat sind die Eigenlösungen der Maxwellschen Gleichungen eine gerade und eine ungerade Funktion bezüglich y. Das Feldproblem für die ungerade Funktion läßt sich dann nach Anbringung einer vollkommen leitenden Wand in der Sym-

metrieebene durch die so entstehende Leitung mit einem Streifenleiter beschreiben. Auch dieses Spiegelungsprinzip gilt bei magnetisiertem Ferritsubstrat nicht mehr uneingeschränkt. Nur bei Magnetisierung senkrecht zur elektrischen Wand entsteht durch Spiegelung der Leitung mit einem Streifenleiter an dieser Wand ein System von zwei gekoppelten Leitungen auf Ferritmaterial mit gleichem äußeren Magnetfeld, und es existiert eine ungerade Funktion als Lösung [39].Hier liegt das Gleichfeld indessen parallel zur Wand. Dann wäre das Ferritsubstrat in den durch Spiegelung entstehenden Halbräumen in entgegengesetzter Richtung magnetisiert, und in diesem Fall würde wieder eine ungerade Funktion als Lösung existieren. Das gekoppelte Leitungssystem ist indessen einheitlich in e i n e r Richtung homogen magnetisiert; als Eigenlösungen müssen Überlagerungen von geraden und ungeraden Funktionen erwartet werden.

3.2 Herleitung des Greenschen Tensors

Wegen der angenommenen Verlustfreiheit des Ferrits und der Leiter ist die z-Abhängigkeit des elektromagnetischen Feldes proportional $\exp(-jk_z z)$. Für das übrigbleibende zweidimensionale Problem in der xy-Ebene läßt sich der Zusammenhang zwischen den in den Leitern in x = h fließenden Strömen und dem elektrischen Feld über die tensorielle Greensche Funktion mit

$$\vec{E}(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{G}(x,y,y')j\vec{J}(y')dy' \qquad (3.3)$$

herstellen [16], [40], wobei y' die Quellpunktskoordinate ist. Um weiterhin die in Gl. (2.2) eingeführte Operatorschreibweise benutzen zu können, wurde der Faktor j aus dem Greenschen Tensor herausgezogen. Da die Streifenleiter keine Ausdehnung in x-Richtung haben, tritt keine Integration über x' auf. Zur Bestimmung des Greenschen Tensors muß die idealisierte Struktur ohne Streifenleiter betrachtet werden. Durch deren unendliche Ausdehnung und Homogenität bezüglich der y-Koordinate ist dieses elektromagnetische Problem invariant gegenüber Translationen in y-Richtung.

Daraus folgt für den Greenschen Tensor in Gl. (3.3):

$$\mathbf{G}(x,y,y') = \mathbf{G}(x,y-y') \ . \tag{3.4}$$

Damit stellt die rechte Seite von

$$\vec{E}(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}(x,y-y')j\vec{J}(y')dy' \tag{3.5}$$

ein Integral vom Faltungstyp dar. Dies legt es nahe, beide Seiten von Gl. (3.5) einer Fourier-Transformation bezüglich der y-Koordinate zu unterziehen, was nach bekannten Gesetzen [41] auf

$$\vec{\tilde{E}}(x,p) = \mathbf{G}(x,p)j\vec{\tilde{J}}(p) \tag{3.6}$$

führt, wenn die Fourier-Transformation durch die Integrale

$$\vec{\tilde{E}}(x,p) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(x,y) \exp(-jpy)dy \ ,$$

$$\vec{E}(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\tilde{E}}(x,p) \exp(jpy)dp \ , \tag{3.7}$$

$$\vec{\tilde{J}}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{J}(y) \exp(-jpy)dy$$

beschrieben wird, und der Tensor $\mathbf{G}$ die allgemeine Form

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} G_{xx} & G_{xy} & G_{xz} \\ G_{yx} & G_{yy} & G_{yz} \\ G_{zx} & G_{zy} & G_{zz} \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

hat. Wegen der durch die Fourier-Transformation erzielten Vereinfachung von Gl. (3.5) soll das Feldproblem im folgenden für die fouriertransformierten Größen - also im Ortsfrequenzbereich - gelöst werden. Vor der analytischen Berechnung des Greenschen Tensors werden zunächst einige allgemeine Eigenschaften untersucht, die sich bereits vor der Lösung eines konkreten Randwertproblems angeben lassen. Unter Zugrundelegung der Operatorschreibweise nach Gl. (2.2) ergibt sich für reelles k_z bei hermiteschem inneren Produkt - Verlustfreiheit war vorausgesetzt - ein selbst-

adjungierter Operator Λ_t entsprechend Gl. (2.35). Aus

$$\langle \Lambda_t \vec{\vec{F}}, \vec{\vec{F}} \rangle = \langle \vec{\vec{F}}, \Lambda_t \vec{\vec{F}} \rangle \tag{3.9}$$

folgt mit Gl. (2.2)

$$\langle j\vec{\vec{Q}}, \vec{\vec{F}} \rangle = \langle \vec{\vec{F}}, j\vec{\vec{Q}} \rangle \tag{3.10}$$

oder in ausgeschriebener Form

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int \vec{\vec{Q}}\, \vec{\vec{F}}^{*}\, dydx = - \int_{-\infty}^{\infty}\int \vec{\vec{Q}}^{*} \vec{\vec{F}}\, dydx \,. \tag{3.11}$$

Durch Anwendung der Parsevalschen Beziehung [41] ergibt sich für die fouriertransformierten Größen

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int \vec{\vec{Q}}\, \vec{\vec{F}}^{*}\, dpdx = - \int_{-\infty}^{\infty}\int \vec{\vec{Q}}^{*} \vec{\vec{F}}\, dpdx \,. \tag{3.12}$$

In Verallgemeinerung von Gl. (3.6) gilt zwischen den transformierten Quellen $\vec{\vec{Q}}$ und den zugehörigen Feldern $\vec{\vec{F}}$ der Zusammenhang

$$\vec{\vec{F}}(x,p) = \Gamma(x,p) j\vec{\vec{Q}}(x,p) \tag{3.13}$$

oder ausgeschrieben

$$\begin{pmatrix} \vec{\vec{E}} \\ j\vec{\vec{H}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G & G_{eh} \\ G_{he} & G_{h} \end{pmatrix} j \begin{pmatrix} \vec{\vec{J}} \\ j\vec{\vec{M}} \end{pmatrix} , \tag{3.14}$$

wobei z. B. G_{eh} der Tensor ist, der den Zusammenhang zwischen $\vec{\vec{E}}$ und $-\vec{\vec{M}}$ herstellt. Einsetzen von Gl. (3.13) und ihrer konjugiert komplexen in Gl. (3.12) führt auf

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int \vec{\vec{Q}}\, \Gamma^{*} \vec{\vec{Q}}^{*}\, dpdx = \int_{-\infty}^{\infty}\int \vec{\vec{Q}}^{*} \Gamma\, \vec{\vec{Q}}\, dpdx \tag{3.15}$$

und nach weiterer Umformung auf

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int (\vec{\vec{Q}}\, \Gamma^{*} \vec{\vec{Q}}^{*} - \vec{\vec{Q}}\, \Gamma^{T} \vec{\vec{Q}}^{*})\, dpdx = \int_{-\infty}^{\infty}\int \vec{\vec{Q}} (\Gamma^{*} - \Gamma^{T}) \vec{\vec{Q}}^{*}\, dpdx = 0 \,. \tag{3.16}$$

Da diese Beziehung für beliebige Quellen $\vec{\mathbf{Q}}$ gelten muß, folgt für den Greenschen Tensor aus Gl. (3.13)

$$\boldsymbol{\Gamma}(p) = \{\boldsymbol{\Gamma}^{*}(p)\}^{T} \quad , \tag{3.17}$$

d. h. $\boldsymbol{\Gamma}(p)$ ist hermitesch. Eine ähnliche Beziehung für den Ortsbereich ist in [42] hergeleitet worden.

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird weiterhin nur die p-Abhängigkeit explizite angegeben. Für den Tensor $\mathbf{G}$, der den hier hauptsächlich interessierenden Zusammenhang zwischen den transformierten Größen $\vec{\tilde{E}}$ und $\vec{\tilde{J}}$ herstellt, gilt

$$\mathbf{G}(p) = \{\mathbf{G}^{*}(p)\}^{T} \quad . \tag{3.18}$$

Daraus folgt für die Hauptdiagonalelemente

$$G_{ii}(p) = G_{ii}^{*}(p), \quad i = x, y, z \quad , \tag{3.19}$$

d. h. daß sie reell sind, während für die übrigen Elemente

$$G_{ij}(p) = G_{ji}^{*}(p), \quad i, j = x, y, z \tag{3.20}$$

gilt. Da bei der Diskussion der allgemeinen Eigenschaften des Greenschen Tensors noch keine Festlegung über die Form der Materialparameter getroffen werden mußte, gelten Gln. (3.19) und (3.20) bei beliebiger Richtung des statischen Magnetfeldes.

Die Eigenschaften der Elemente des Greenschen Tensors lassen sich noch weiter spezialisieren, wenn zusätzlich berücksichtigt wird, daß die Felder Lösungen des Randwertproblems für eine in z-Richtung homogene Wellenleitung sein müssen. Bei beliebiger Richtung des statischen Magnetfeldes senkrecht zur Ausbreitungsrichtung gilt für die transversalen (in der Querschnittsebene liegenden) und longitudinalen Feldanteile [43]

$$\begin{aligned} \vec{E}_t &= -\vec{E}_t^{*} \quad , \quad E_z = E_z^{*} \quad , \\ \vec{H}_t &= -\vec{H}_t^{*} \quad , \quad H_z = H_z^{*} \quad . \end{aligned} \tag{3.21}$$

Die Transversalanteile sind also imaginär, die Komponenten in Ausbreitungsrichtung reell. Für die Stromdichte $\vec{J}$ auf den Streifenleitern und der Leiterplatte gilt

$$\vec{J} = \vec{n} \times \vec{H} \quad , \tag{3.22}$$

wobei $\vec{n}$ der Normaleneinheitsvektor auf den Leitern ist, der in den Feldraum hineinzeigt. Mit Gl. (3.21) folgt daher

$$\begin{aligned} \vec{J}_t &= \vec{J}_t^* \quad , \\ J_z &= - J_z^* \quad , \end{aligned} \tag{3.23}$$

so daß also der Transversalanteil der Stromdichte reell, der Longitudinalanteil imaginär ist.

Für die Fouriertransformierte einer reellen Funktion R(y) gilt

$$\overline{R}(p) = \overline{R}^*(-p) \quad , \tag{3.24}$$

für die einer imaginären Funktion I(y)

$$\overline{I}(p) = - \overline{I}^*(-p) \quad . \tag{3.25}$$

Unter Berücksichtigung dieser Lösungseigenschaften können weitere Aussagen über die Elemente des Greenschen Tensors $\mathbf{G}$ gemacht werden. Für den Zusammenhang zwischen $\overline{E}_z$ und $\overline{J}_z$ folgt aus Gl. (3.6)

$$\overline{E}_z(p) = G_{zz}(p) j \overline{J}_z(p) \tag{3.26}$$

und somit auch

$$\overline{E}_z(-p) = G_{zz}(-p) j \overline{J}_z(-p) \quad . \tag{3.27}$$

Mit dem konjugiert komplexen Ausdruck dieser Gleichung kann unter Berücksichtigung von Gl. (3.21), (3.23) - (3.25) die Beziehung

$$\overline{E}_z(p) = G_{zz}^*(-p) j \overline{J}_z(p) \tag{3.28}$$

gewonnen werden. Die Gegenüberstellung mit Gl. (3.26) zeigt, daß

$$G_{zz}(p) = G^{*}_{zz}(-p) \qquad (3.29)$$

gilt. Da $G_{zz}(p)$ nach Gl. (3.19) reell ist, folgt weiterhin

$$G_{zz}(p) = G_{zz}(-p) \quad . \qquad (3.30)$$

Eine analoge Vorgehensweise liefert für alle Diagonalelemente das gleiche Ergebnis: sie sind alle reell und gerade Funktionen in p. Für die Nichtdiagonalelemente ergibt sich eine Aufteilung in zwei Typen. Aus dem Zusammenhang zwischen $\overline{E}_y$ und $\overline{J}_z$ folgt

$$\overline{E}_y(-p) \quad G_{yz}(-p)j\overline{J}_z(-p) \quad . \qquad (3.31)$$

Die konjugiert komplexe Beziehung führt unter Berücksichtigung der oben genannten Eigenschaften schließlich auf

$$G_{yz}(p) = - G^{*}_{yz}(-p) \quad , \qquad (3.32)$$

und nach Aufspaltung in Real- und Imaginärteil auf

$$\mathrm{Re}\{G_{yz}(p)\} = - \mathrm{Re}\{G_{yz}(-p)\} \quad , \qquad (3.33)$$

$$\mathrm{Im}\{G_{yz}(p)\} = \mathrm{Im}\{G_{yz}(-p)\} \quad . \qquad (3.34)$$

Die gleichen Eigenschaften ergeben sich für Real- und Imaginärteil von $G_{xz}(p)$, so daß die Realteile beider Elemente also ungerade, die Imaginärteile gerade Funktionen in p sind. Entsprechende Überlegungen für $G_{xy}(p)$ ergeben einen geraden Realteil und einen ungeraden Imaginärteil in p.

Die Bestimmung der G_{ij} für gekoppelte Mikrostreifenleitungen bei Magnetisierung senkrecht zum Ferritsubstrat, also für den Permeabilitätstensor nach Gl. (3.1), geschieht in Anlehnung an die für die Einzelleitung durchgeführte Berechnung [33]. Die Maxwellschen Gleichungen (2.1) lassen sich bei Quellenfreiheit auf die Form

$$\nabla\times\vec{E} = k_o\mu_r(-jZ_o\vec{H}) \quad ,$$
$$\nabla\times(-jZ_o\vec{H}) = k_o\varepsilon_r\vec{E} \tag{3.35}$$

bringen, mit den Abkürzungen

$$k_o = \omega\sqrt{\varepsilon_o\mu_o} \quad ,$$
$$Z_o = \sqrt{\mu_o/\varepsilon_o} \quad . \tag{3.36}$$

Im folgenden werden

$$-jZ_o\vec{H} = \underset{\sim}{\vec{H}} \quad \text{und} \quad k_z = k_o b \tag{3.37, 38}$$

gesetzt. Um die Lösung des Feldproblems für die fouriertransformierten Felder zu erhalten, werden die Maxwellschen Gleichungen (3.35) der Fouriertransformation gemäß Gl. (3.7) unterworfen. Mit

$$\frac{\partial}{\partial z} = -jk_o b \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y} = jp \tag{3.39}$$

geht die partielle Differentialgleichung in eine gewöhnlich über, so daß

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} = d_x^n \tag{3.40}$$

gesetzt werden kann. Damit lassen sich die Maxwellschen Gleichungen dann in der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & -jbk_o & -jp & k_o & 0 & 0 \\ jbk_o & 0 & d_x & 0 & k_o\mu & -k_o j\kappa \\ jp & -d_x & 0 & 0 & k_o j\kappa & k_o\mu \\ k_o\varepsilon_r & 0 & 0 & -jbk_o & -jp & \\ 0 & k_o\varepsilon_r & 0 & jbk_o & 0 & d_x \\ 0 & 0 & k_o\varepsilon_r & jp & -d_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{E}_x \\ \bar{E}_y \\ \bar{E}_z \\ \underset{\sim}{\bar{H}}_x \\ \underset{\sim}{\bar{H}}_y \\ \underset{\sim}{\bar{H}}_z \end{pmatrix} = (0) \tag{3.41}$$

schreiben. Durch geeignete Multiplikationen und Additionen der 1., 2., 4. und 5. Zeile dieses Gleichungssystems können die Transversalkomponenten durch die Longitudinalkomponenten ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}
\overline{E}_x &= \frac{-jb}{K_1} d_x \overline{E}_z + j\frac{p\mu + jk_o b\kappa}{K_1} \overline{H}_z \quad , \\
\overline{E}_y &= \frac{pb}{K_2} \overline{E}_z - \frac{1}{K_2} d_x \overline{H}_z \quad , \\
\overline{H}_x &= \frac{jp\varepsilon_r}{K_2} \overline{E}_z - \frac{jb}{K_2} d_x \overline{H}_z \quad , \\
\overline{H}_y &= -\frac{\varepsilon_r}{K_1} d_x \overline{E}_z + \frac{pb + jk_o \varepsilon_r \kappa}{K_1} \overline{H}_z \quad ,
\end{aligned} \tag{3.42}$$

mit $K_1 = k_o(\varepsilon_r\mu - b^2)$, $K_2 = k_o(\varepsilon_r - b^2)$.

Nach Einsetzen dieser Beziehungen in die noch verbliebenen Zeilen 3 und 6 der Matrixgleichung (3.41) lassen sich zwei verkoppelte Differentialgleichungen für die z-Komponenten gewinnen

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_r(a_1 + a_2)d_x & e_1\mu p^2 - k_o^2 e_1 \mu(\varepsilon_r\mu_\perp - b^2) - e_2 d_x^2 \\ k_o^2 e_1 e_2 - e_2 p^2 + e_1 d_x^2 & (a_1 - a_2)d_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{E}_z \\ \overline{H}_z \end{pmatrix} = (0) \tag{3.43}$$

mit

$$\begin{aligned}
e_1 &= \varepsilon_r - b^2 \quad , & e_2 &= \varepsilon_r\mu - b^2 \quad , \\
a_1 &= pb(\mu - 1) \quad , & a_2 &= jk_o\kappa(\varepsilon_r - b^2) \quad , \\
\mu_\perp &= \frac{\mu^2 - \kappa^2}{\mu} \quad ,
\end{aligned} \tag{3.44}$$

und daraus eine Differentialgleichung 4. Ordnung für $\overline{E}_z$

$$(d_x^4 - g_2 d_x^2 + g_o)\bar{E}_z = 0 \tag{3.45}$$

mit

$$\begin{aligned} g_o &= \mu\{p^2 - k_o^2(\varepsilon_r - b^2)\}\{p^2 - k_o^2(\varepsilon_r\mu_\perp - b^2)\} \quad , \\ g_2 &= (\mu + 1)(p^2 + b^2 k_o^2) - 2k_o^2\varepsilon_r\mu \quad . \end{aligned} \tag{3.46}$$

Ein geeigneter Ansatz zur Lösung der Gl. (3.45) ist

$$\bar{E}_z = \sum_{i=1}^{4} A_i \exp(s_i x) \tag{3.47}$$

mit

$$\begin{aligned} s_1 &= -s_2 = \{g_2/2 + (g_2^2/4 - g_o)^{1/2}\}^{1/2} \quad , \\ s_3 &= -s_4 = \{g_2/2 - (g_2^2/4 - g_o)^{1/2}\}^{1/2} \end{aligned} \tag{3.48}$$

als Lösung des charakteristischen Polynoms der Differentialgleichung (3.45). Mit Gl. (3.47) ergibt sich aus Gl. (3.43) für

$$\bar{H}_z = \sum_{i=1}^{4} A_i B_i \exp(s_i x) \tag{3.49}$$

mit

$$B_i = \frac{(\varepsilon_r\mu - b^2)\{p^2 - k_o^2(\varepsilon_r - b^2)\} - s_i^2(\varepsilon_r - b^2)}{s_i\{p\mu(\mu - 1) - jk_o\varepsilon_r(\varepsilon_r - b^2)\}} \quad . \tag{3.50}$$

Die Transversalkomponenten lassen sich dann durch Einsetzen von $\bar{E}_z$ und $\bar{H}_z$ in Gl. (3.42) angeben als

$$\begin{aligned} \bar{E}_x &= \sum_{i=1}^{4} A_i C_i \exp(s_i x) \\ \bar{E}_y &= \sum_{i=1}^{4} A_i L_i \exp(s_i x) \quad , \\ \bar{H}_x &= \sum_{i=1}^{4} A_i D_i \exp(s_i x) \quad , \\ \bar{H}_y &= \sum_{i=1}^{4} A_i M_i \exp(s_i x) \end{aligned} \tag{3.51}$$

mit den Abkürzungen

$$
\begin{aligned}
C_i &= j\{B_i(p\mu + jk_o b\kappa) - bs_i\}/K_1 \quad , \\
D_i &= j\{p\varepsilon_r - bB_i s_i\}/K_2 \quad , \\
L_i &= (pb - B_i s_i)/K_2 \quad , \\
M_i &= \{B_i(pb + jk_o\varepsilon_r\kappa) - \varepsilon_r s_i\}/K_1 \quad .
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

Für diese Größen gelten die Beziehungen

$$
\begin{aligned}
&B_i = -B_{i+1} \;,\; C_i = -C_{i+1} \;,\; D_i = D_{i+1} \;, \\
&L_i = L_{i+1} \;,\; M_i = -M_{i+1} \quad .
\end{aligned}
\qquad i=1,\,3 \tag{3.53}
$$

Damit lassen sich die Feldkomponenten im Raumbereich 1 ($x < h$, Ferrit ohne Streifenleiter, s. S. 23) nach Erfüllung der Randbedingungen auf der Grundplatte

$$
\bar{E}_y(x=0,p) = \bar{E}_z(x=0,p) = 0 \tag{3.54}
$$

schließlich darstellen durch

$$
\begin{aligned}
\bar{E}_x &= C\,C_1\cosh(s_1 x) + D\,C_3\cosh(s_3 x) \quad , \\
\bar{E}_y &= C\,L_1\sinh(s_1 x) + D\,L_3\sinh(s_3 x) \quad , \\
\bar{E}_z &= C\,\sinh(s_1 x) + D\,\sinh(s_3 x) \quad , \\
\bar{H}_x &= C\,D_1\sinh(s_1 x) + D\,D_3\sinh(s_3 x) \quad , \\
\bar{H}_y &= C\,M_1\cosh(s_1 x) + D\,M_3\cosh(s_3 x) \quad , \\
\bar{H}_z &= C\,B_1\cosh(s_1 x) + D\,B_3\cosh(s_3 x) \quad .
\end{aligned}
\tag{3.55}
$$

Die für den Raumbereich 2 ($x > h$, freier Raum über dem Ferrit-

substrat) gültigen Beziehungen ergeben sich aus den Gln. (3.42) und (3.43) mit

$$\varepsilon_r = 1, \quad \mu = 1, \quad \kappa = 0 \ . \tag{3.56}$$

Für $\bar{E}_z$ und $\underset{\sim}{\bar{H}}_z$ folgen daher die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} d_x^2 \bar{E}_z - \gamma_x^2 \bar{E}_z &= 0 \ , \\ d_x^2 \underset{\sim}{\bar{H}}_z - \gamma_x^2 \underset{\sim}{\bar{H}}_z &= 0 \end{aligned} \tag{3.57}$$

mit

$$\gamma_x^2 = p^2 - k_o^2 + k_z^2 \ . \tag{3.58}$$

Aus der Forderung, daß die Felder mit wachsendem x exponentiell abklingen müssen, resultiert die Lösung

$$\begin{aligned} \bar{E}_z &= A \exp\{-\alpha_x (x-h)\} \\ \underset{\sim}{\bar{H}}_z &= B \exp\{-\alpha_x (x-h)\} \end{aligned} \tag{3.59}$$

wobei α_x mit Gln. (3.58) und (3.38)

$$\alpha_x = \{p^2 + k_o^2 (b^2 - 1)\}^{1/2} > 0 \ ^*) \tag{3.60}$$

ist. Die Transversalkomponenten ergeben sich mit Gln. (3.59) wieder aus Gln. (3.42)

$$\begin{aligned} \bar{E}_x &= (t_{11} A + t_{12} B) \exp\{-\alpha_x (x-h)\} \ , \\ \bar{E}_y &= (d_{11} A + d_{12} B) \exp\{-\alpha_x (x-h)\} \ , \\ \underset{\sim}{\bar{H}}_x &= (t_{12} A + t_{11} B) \exp\{-\alpha_x (x-h)\} \ , \\ \underset{\sim}{\bar{H}}_y &= (d_{12} A + d_{11} B) \exp\{-\alpha_x (x-h)\} \ , \end{aligned} \tag{3.61}$$

mit den Abkürzungen

*)Diese Bedingung ist für Wellentypen mit b > 1 erfüllt.

$$t_{11} = \frac{-j\alpha_x b}{N} \quad ,$$

$$t_{12} = \frac{-jp}{N} \quad ,$$

$$d_{11} = \frac{-pb}{N} \quad , \tag{3.63}$$

$$d_{12} = \frac{-\alpha_x}{N}$$

und

$$N = k_o(b^2 - 1) \quad . \tag{3.64}$$

Aus der Erfüllung der Stetigkeitsbedingungen an der Grenze $x = h$ beider Raumbereiche

$$\begin{aligned} \bar{E}_{y1}(x=0,p) &= \bar{E}_{y2}(x=h,p) \quad , \\ \bar{E}_{y1}(x=h,p) &= \bar{E}_{y2}(x=h,p) \quad , \\ \bar{E}_{z2}(x=h,p) - \bar{E}_{z1}(x=h,p) &= -\bar{K}_y(p) \quad , \\ \bar{H}_{y2}(x=h,p) - \bar{H}_{y1}(x=h,p) &= \bar{K}_z(p) \end{aligned} \tag{3.65}$$

läßt sich der Zusammenhang zwischen den Amplituden A, B, C, D aus den Gln. (3.55), (3.59) und (3.61) und mit den entsprechend

$$\bar{K}_y = -jZ_o\bar{J}_y \quad , \quad \bar{K}_z = -jZ_o\bar{J}_z \tag{3.66}$$

normierten Oberflächenstromdichten $\bar{K}_y$ und $\bar{K}_z$ über die Beziehung

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \\ T_{31} & T_{32} \\ T_{41} & T_{42} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{K}_y \\ \bar{K}_z \end{pmatrix} \tag{3.67}$$

herstellen. Mit den A, B, C, D kann dann aus Gln. (3.55) und (3.61)

die tensorielle Greensche Funktion gemäß

$$\begin{aligned} \bar{E}_y &= G_{yy}\bar{K}_y + G_{yz}\bar{K}_z \\ \bar{E}_z &= G_{zy}\bar{K}_y + G_{zz}\bar{K}_z \end{aligned} \tag{3.67}$$

für beide Raumbereiche bestimmt werden. Im Anhang, Abschnitt 8.4, sind die bei Erfüllung der Stetigkeitsbedingungen (3.64) aus der Lösung für den Raumbereich 2 sich ergebenden Komponenten des Greenschen Tensors für x = h zusammen mit den T_{ij} angegeben.

3.3 Lösung des Randwertproblems für zwei gekoppelte Leitungen

3.3.1 Herleitung eines linearen Gleichungssystems

Da eine geschlossene Lösung des durch die Aufgabenstellung definierten Randwertproblems nicht bekannt ist, wird es in eine Form transformiert, die eine numerische Lösung gestattet. Dabei soll unter Lösung des Randwertproblems hier sowohl die Ermittlung der Wellenzahl k_z (Dispersion) als auch der Stromverteilung auf den Streifenleitern und damit der Feldverteilung verstanden werden.

Im Abschnitt 2 ist als die einem Randwertproblem äquivalente Formulierung die Darstellung durch ein stationäres Funktional und ein daraus mit Hilfe des Ritz-Verfahrens gewonnenes lineares Gleichungssystem beschrieben worden. Dieser Weg soll hier beschritten werden. Er weist die in Abschnitt 2 beschriebenen Vorteile gegenüber den in der Literatur durchgeführten Verfahren auch für die Einzelleitung auf. Da die Formulierung für diese zudem die Grundlage für die Analyse der gekoppelten Leitungen darstellt, soll das Problem der Einzelleitung vorangestellt werden.

Als stationäres Funktional der Energiemethode für eine Wellenleitung mit magnetisiertem Ferrit ist im Abschnitt 2 Gl. (2.38) angegeben worden. Bei reellem k_z ist das vorliegende Problem bei hermiteschem inneren Produkt selbstadjungiert, und aus Gl. (2.38)

folgt mit Gl. (2.46)

$$\langle \vec{Q}, \vec{F} \rangle = \langle \vec{F}, \vec{Q} \rangle = 0 \quad . \tag{3.68}$$

Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß auf den Leitern nur elektrische Ströme auftreten, und weil es infolge der eingangs gemachten Annahmen eine x-Komponente des Stromes nicht gibt, läßt sich Gl. (3.68) in der Form

$$\int \vec{E} \vec{J}^{*} \, dA = \int (E_y J_y^{*} + E_z J_z^{*}) dA = 0 \quad , \tag{3.69}$$

schreiben, wobei das Integral über den Querschnitt A der Wellenleitung zu erstrecken ist. Unter Berücksichtigung der in Gl. (3.23) für J_y und J_z angegebenen Eigenschaften folgt schließlich

$$\int (E_y J_y - E_z J_z) dA = 0 \quad . \tag{3.70}$$

Zum selben Ergebnis führt die Wahl des symmetrischen inneren Produkts in Gl. (2.38). Dann sind aber zusätzliche Überlegungen zum adjungierten Problem notwendig, das hier das der rücklaufenden Welle im Medium mit transponiertem Tensor ist [43]. Bei der Berechnung des zugehörigen Feldes trat die normierte Flächenstromdichte $\vec{K}$ auf, wegen Gl. (3.65) kann Gl. (3.70) auch in der Form

$$\int (E_y K_y - E_z K_z) dA = 0 \tag{3.71}$$

geschrieben werden. Um den in Abschnitt 3.2 hergeleiteten Zusammenhang zwischen $\vec{E}$ und $\vec{K}$ entsprechend Gl. (3.67) einbringen zu können, wird Gl. (3.71) mit Hilfe des Parseval-Theorems unter Beachtung der Tatsache, daß nach Gl. (3.23) K_z reell und K_y imaginär sind, in den Ortsfrequenzbereich transformiert

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\bar{E}_y \bar{K}_y^{*} + \bar{E}_z \bar{K}_z^{*}) dp = 0 \quad . \tag{3.72}$$

Die Einführung der tensoriellen Greenschen Funktion über

Gl. (3.67) liefert mit Gl. (3.20) das stationäre Funktional

$$\int_{-\infty}^{\infty}[(G_{yy}\bar{K}_y + G_{zy}^{*}\bar{K}_z)\bar{K}_y^{*} + (G_{zy}\bar{K}_y + G_{zz}\bar{K}_z)\bar{K}_z^{*}]dp =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}(G_{yy}\bar{K}_y\bar{K}_y^{*} + 2\mathrm{Re}\{G_{zy}^{*}\bar{K}_y^{*}\bar{K}_z\} + G_{zz}\bar{K}_z\bar{K}_z^{*})dp = 0 \,, \tag{3.73}$$

das nur noch die normierten Oberflächenstromdichten als Unbekannte enthält. Zu deren Berechnung müssen eine geeignete Reihenentwicklung vorgenommen, und anschließend mit Hilfe des Ritz-Verfahrens ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung der Entwicklungskoeffizienten aufgestellt werden.

Die Entwicklungen der Ströme für die Einzelleitung werden allgemein durch

$$K_y(y) = j\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(y) \,,$$
$$K_z(y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n g_n(y) \,, \tag{3.74}$$

mit reellen Koeffizienten a_n, b_n und reellen Funktionen f_n, g_n angesetzt. Diese Funktionen müssen so gewählt werden, daß sie nur auf dem Streifen Werte ungleich null annehmen und außerhalb des Streifens verschwinden. Nach Transformation dieser Reihen in den Ortsfrequenzbereich läßt sich für das Funktional (3.73) schließlich

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\{G_{yy}\sum_n a_n\bar{f}_n(p)\sum_n a_n\bar{f}_n^{*}(p) + 2\mathrm{Im}\{G_{zy}^{*}\sum_n a_n\bar{f}_n^{*}(p)\sum_n b_n\bar{g}_n(p)\} +$$
$$+ G_{zz}\sum_n b_n\bar{g}_n(p)\sum_n b_n\bar{g}_n^{*}(p)\}dp = 0 \tag{3.75}$$

angeben. Dabei bezeichnen $\bar{f}_n(p)$ und $\bar{g}_n(p)$ die Fouriertransformierten der $f_n(y)$ und $g_n(y)$. Wegen des stationären Verhaltens des Funktionals müssen die Ableitungen nach allen a_m, b_m verschwinden (Ritz), d. h.

$$\frac{\partial I}{\partial a_m} = \frac{\partial I}{\partial b_m} = 0 \,, \quad m = 1, 2, \ldots \,. \tag{3.76}$$

Daraus folgt das lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten a_n und b_n:

$$\frac{\partial I}{\partial a_m} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} (G_{yy} \mathrm{Re}\{\sum_n a_n \bar{f}_n \bar{f}_m^*\} + \mathrm{Im}\{G_{zy}^* \sum_n b_n \bar{g}_n \bar{f}_m^*\}) dp = 0 , \qquad (3.77)$$

$$m,n=1,2,\ldots$$

$$\frac{\partial I}{\partial b_m} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} (\mathrm{Im}\{G_{zy}^* \sum_n a_n \bar{f}_n^* \bar{g}_m\} + G_{zz} \mathrm{Re}\{\sum_n b_n \bar{g}_n \bar{g}_m^*\}) dp = 0 . \qquad (3.78)$$

Werden alle a_n zu dem Vektor $\vec{A}$ und alle b_n zum Vektor $\vec{B}$ zusammengefaßt, so ist

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} \vec{A} \\ \vec{B} \end{pmatrix} \qquad (3.79)$$

der Spaltenvektor aller Entwicklungskoeffizienten. Die Faktoren der a_n und b_n der m-ten Gleichung sind nach Gln. (3.77) und (3.78):

$$M_{yymn} = \int_{-\infty}^{\infty} G_{yy} \mathrm{Re}\{\bar{f}_m^* \bar{f}_n\} dp , \quad M_{yzmn} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}\{G_{zy}^* \bar{f}_m^* \bar{g}_n\} dp ,$$

$$M_{zymn} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}\{G_{zy}^* \bar{g}_m \bar{f}_n^*\} dp , \quad M_{zzmn} = \int_{-\infty}^{\infty} G_{zz} \mathrm{Re}\{\bar{g}_m^* \bar{g}_n\} dp . \qquad (3.80)$$

Damit kann das Gleichungssystem (3.77), (3.78) vereinfachend in der Form

$$M \vec{C} = 0 \qquad (3.81)$$

mit

$$M = \begin{pmatrix} M_{yy} & M_{yz} \\ M_{zy} & M_{zz} \end{pmatrix} \qquad (3.82)$$

geschrieben werden. Unabhängig von der Wahl spezieller Entwicklungsfunktionen f_n und g_n können aus Gln. (3.80) die Eigenschaften

$$M_{yy} = M_{yy}^T , \quad M_{zz} = M_{zz}^T , \quad M_{zy} = M_{yz}^T \qquad (3.83)$$

abgelesen werden, woraus folgt, daß die Matrix M symmetrisch ist. Das Gleichungssystem (3.81) ist ein geeigneter Ausgangspunkt für eine Näherungslösung des Randwertproblems, wie in Abschnitt 4 anhand von Beispielen gezeigt wird.

In der Literatur wird sowohl für das vorliegende Problem als auch für andere planare Strukturen direkt von einem Projektionsverfahren - Momentenmethode oder Galerkinverfahren - Gebrauch gemacht. Zur Berechnung von Mikrostreifenleitungen haben Itoh und Mittra [29] das Galerkinverfahren auf in den Ortsfrequenzbereich transformierte Gleichungen angewandt. Zur Herleitung wird hier vom Zusammenhang Gln. (3.67) zwischen dem elektrischen Feld $\tilde{\vec{E}}$ und der normierten Flächenstromdichte $\tilde{\vec{K}}$ im Ortsfrequenzbereich ausgegangen. In dieser Beziehung treten mit $\tilde{K}_y$, $\tilde{K}_z$, $\tilde{E}_y$ und $\tilde{E}_z$ vier unbekannte Funktionen auf. Entsprechend den Vorschriften der Momentenmethode wird eine geeignete Reihenentwicklung

$$\tilde{\vec{K}} = \sum_n a_n \tilde{\vec{K}}^y_n + \sum_n b_n \tilde{\vec{K}}^z_n \quad , \; n=1,2,\ldots \tag{3.84}$$

durchgeführt mit

$$\tilde{\vec{K}}^y_n = \begin{pmatrix} \tilde{K}^y_n \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad \tilde{\vec{K}}^z_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{K}^z_n \end{pmatrix} \tag{3.85}$$

als Basisfunktionen. Werden diese Reihenentwicklung in Gl. (3.67) eingesetzt und das innere Produkt mit den Basisfunktionen genommen (Galerkinverfahren), so entsteht das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \sum_n a_n \langle \mathbf{G}\tilde{\vec{K}}^y_n, \tilde{\vec{K}}^y_m \rangle + \sum_n b_n \langle \mathbf{G}\tilde{\vec{K}}^z_n, \tilde{\vec{K}}^y_m \rangle &= \langle \tilde{\vec{E}}, \tilde{\vec{K}}^y_m \rangle \\ \sum_n a_n \langle \mathbf{G}\tilde{\vec{K}}^y_n, \tilde{\vec{K}}^z_m \rangle + \sum_n b_n \langle \mathbf{G}\tilde{\vec{K}}^z_n, \tilde{\vec{K}}^z_m \rangle &= \langle \tilde{\vec{E}}, \tilde{\vec{K}}^z_m \rangle \end{aligned} \qquad m,n=1,2,\ldots \tag{3.86}$$

und bei der in der Literatur üblichen Zugrundelegung des symmetrischen inneren Produkts ausgeschrieben

$$\sum_n a_n \int_{-\infty}^{\infty} G_{yy} \bar{K}_n^y \bar{K}_m^y dp + \sum_n b_n \int_{-\infty}^{\infty} G_{yz} \bar{K}_n^z \bar{K}_m^y dp = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}_y \bar{K}_m^y dp$$

$$\sum_n a_n \int_{-\infty}^{\infty} G_{zy} \bar{K}_n^y \bar{K}_m^z dp + \sum_n b_n \int_{-\infty}^{\infty} G_{zz} \bar{K}_n^z \bar{K}_m^z dp = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}_z \bar{K}_m^z dp \qquad m,n=1,2,\ldots \quad (3.87)$$

Mit Hilfe des Parsevaltheorems kann gezeigt werden, daß die rechte Seite verschwindet, und so ein homogenes Gleichungssystem zur Berechnung der Entwicklungskoeffizienten entsteht, wie in der Literatur beschrieben [29], [33].Werden als Entwicklungsfunktionen dieselben gewählt wie beim Variationsverfahren in Gln. (3.74) und die Eigenschaften für die Ströme von Gln. (3.23) berücksichtigt, so haben die Elemente der Untermatrizen einer Gl. (3.82) analogen Koeffizientenmatrix **N** die Form:

$$N_{yymn} = -\int_{-\infty}^{\infty} G_{yy} \bar{f}_m \bar{f}_n dp \;, \quad N_{yzmn} = j \int_{-\infty}^{\infty} G_{zy}^{*} \bar{f}_m \bar{g}_n dp \;,$$

$$N_{zymn} = j \int_{-\infty}^{\infty} G_{zy} \bar{g}_m \bar{f}_n dp \;, \quad N_{zzmn} = \int_{-\infty}^{\infty} G_{zz} \bar{g}_m \bar{g}_n dp \;. \qquad (3.88)$$

Bei Berücksichtigung der in Abschnitt 3.2 ermittelten Eigenschaften der G_{ij} - Gln. (3.20), (3.30), (3.33), (3.34) - läßt sich zeigen, daß das aus Gln. (3.87) und (3.88) resultierende Gleichungssystem identisch ist mit dem aus dem stationären Funktional hergeleiteten in Gl. (3.81). Dasselbe gilt, wenn in Gl. (3.86) statt des symmetrischen inneren Produkts das hermitesche innere Produkt gewählt wird.

Aus der Gegenüberstellung von stationärem Funktional und Galerkinmethode folgen:

- die Gleichwertigkeit von Galerkinverfahren und Variationsverfahren,
- sog. "Eintermansätze" in der Galerkinmethode führen zu guten Ergebnissen für die Ausbreitungskonstante oder Resonanzfrequenz z. B. [29], [44], [45] , weil sie stationären Ausdrücken entsprechen (s. Abschnitt 3.3.2),
- zusätzliche Unbekannte (hier $\bar{E}_y$ und $\bar{E}_z$ in Gl. (3.67)) treten beim Ansatz aus dem stationären Funktional nicht auf. Im

Galerkinverfahren ergeben sich bei ihrer Eliminierung insbesondere bei unsymmetrischen Strukturen Schwierigkeiten, so daß bei der in der Literatur üblichen Verwendung des symmetrischen inneren Produkts die Gewichtsfunktionen verschieden von den Basisfunktionen gewählt werden müssen [44]. Durch Verwendung des hermiteschen inneren Produkts kann dies vermieden werden.

Das hier entwickelte Gleichungssystem (3.81) führt bei Berücksichtigung der allgemeinen Eigenschaften der Greenschen Funktion - Gln. (3.20), (3.30), (3.33), (3.34) - zu einem beträchtlich geringeren Aufwand bei der numerischen Berechnung als das bisher veröffentlichte Galerkinverfahren zur Lösung des Problems der Einzelleitung auf Ferritsubstrat [33] (s. Abschnitt 4).

Der wesentliche Unterschied bei der Herleitung eines Gleichungssystems zur Beschreibung von zwei gekoppelten Leitungen der Breite w_1 und w_2 mit dem Abstand 2t zwischen den Mittellinien der Streifenleiter (Bild 2) besteht in den dem Problem angepaßten

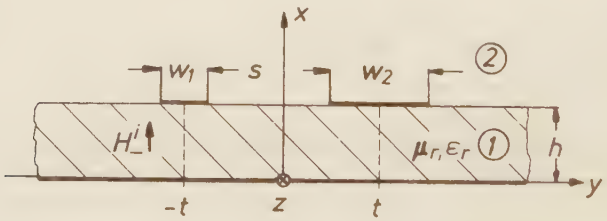


Bild 2. Idealisierte Struktur zweier gekoppelter Mikrostreifenleitungen auf magnetisiertem Ferritsubstrat.

Entwicklungsfunktionen für die Stromdichte. Ausgangspunkt ist auch hier das Funktional Gl. (3.73). Die Entwicklung der Stromkomponenten wird jetzt für jede Leitung gesondert angesetzt:

$$\bar{K}_{y1} = j \sum_{n=1}^{\infty} a_{1n}\bar{f}_{1n}(p)e^{jtp} \quad , \quad \bar{K}_{y2} = j \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}\bar{f}_{2n}(p)e^{-jtp} \quad ,$$
$$\bar{K}_{z1} = \sum_{n=1}^{\infty} b_{1n}\bar{g}_{1n}(p)e^{jtp} \quad , \quad \bar{K}_{z2} = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}\bar{g}_{2n}(p)e^{-jtp} \quad , \qquad (3.89)$$

dabei sind $\bar{f}_{1n}(p)$, $\bar{g}_{1n}(p)$, $\bar{f}_{2n}(p)$ und $\bar{g}_{2n}(p)$ die fouriertransformierten Entwicklungsfunktionen jeweils einer symmetrisch zu $y = 0$ liegenden Einzelleitung der Breite w_1 oder w_2, die Faktoren e^{jtp} und e^{-jtp} entsprechen einer Verschiebung im Ortsbereich um t nach links und nach rechts von $y = 0$. Nachdem in Gl. (3.73) für $\bar{K}_y$ und $\bar{K}_z$ jeweils die Reihenentwicklung nach Gl. (3.89) eingesetzt ist, muß das so entstandene Funktional I nach Ritz den Bedingungen

$$\frac{\partial I}{\partial a_{1m}} = \frac{\partial I}{\partial b_{1m}} = \frac{\partial I}{\partial a_{2m}} = \frac{\partial I}{\partial b_{2m}} = 0, \quad m = 1,2,\ldots \qquad (3.90)$$

unterworfen werden. Nach Berechnung der Terme

$$\frac{\partial I}{\partial a_{1m}} = \int_{-\infty}^{\infty} \{G_{yy}\{(\sum_n a_{1n}\bar{f}_{1n}e^{jtp} + \sum_n a_{2n}\bar{f}_{2n}e^{-jtp})\bar{f}^*_{1m}e^{-jtp} +$$
$$+ (\sum_n a_{1n}\bar{f}^*_{1n}e^{-jtp} + \sum_n a_{2n}\bar{f}^*_{2n}e^{jtp})\bar{f}_{1m}e^{jtp}\} -$$
$$- 2\mathrm{Im}\{G_{zy}(\sum_n b_{1n}\bar{g}^*_{1n}e^{-jtp} + \sum_n b_{2n}\bar{g}^*_{2n}e^{jtp})\bar{f}_{1m}e^{jtp}\}\}dp = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial b_{1m}} = \int_{-\infty}^{\infty} \{-2\mathrm{Im}\{G_{zy}(\sum_n a_{1n}\bar{f}_{1n}e^{jtp} + \sum_n a_{2n}\bar{f}_{2n}e^{-jtp})\bar{g}^*_{1m}e^{-jtp}\} +$$
$$+ G_{zz}\{(\sum_n b_{1n}\bar{g}_{1n}e^{jtp} + \sum_n b_{2n}\bar{g}_{2n}e^{-jtp})\bar{g}^*_{1m}e^{-jtp} +$$
$$+ (\sum_n b_{1n}\bar{g}^*_{1n}e^{-jtp} + \sum_n b_{2n}\bar{g}^*_{2n}e^{jtp})\bar{g}_{1m}e^{jtp}\}\}dp = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_{2m}} = \int_{-\infty}^{\infty} \{G_{yy}\{(\sum_n a_{1n}\bar{F}_{1n}e^{-jtp} + \sum_n a_{2n}\bar{F}_{2n}e^{-jtp})\bar{F}_{2m}e^{jtp} +$$

$$+ (\sum_n a_{1n}\bar{F}^*_{1n}e^{-jtp} + \sum_n a_{2n}\bar{F}^*_{2n}e^{jtp})\bar{F}_{2m}e^{-jtp}\} -$$

$$- 2\mathrm{Im}\{G_{zy}(\sum_n b_{1n}\bar{G}^*_{1n}e^{-jtp} + \sum_n b_{2n}\bar{G}^*_{2n}e^{jtp})\bar{F}_{2m}e^{-jtp}\}\}dp = 0$$

(3.91)

$$\frac{\partial I}{\partial b_{2m}} = \int_{-\infty}^{\infty} \{-2\mathrm{Im}\{G_{zy}(\sum_n a_{1n}\bar{F}_{1n}e^{jtp} + \sum_n a_{2n}\bar{F}_{2n}e^{-jtp})\bar{G}^*_{2m}e^{jtp}\} +$$

$$+ G_{zz}\{(\sum_n b_{1n}\bar{G}_{1n}e^{jtp} + \sum_n b_{2n}\bar{G}_{2n}e^{-jtp})\bar{G}^*_{2m}e^{jtp} -$$

$$+ (\sum_n b_{1n}\bar{G}^*_{1n}e^{-jtp} + \sum_n b_{2n}\bar{G}^*_{2n}e^{jtp})\bar{G}_{2m}e^{-jtp}\}\}dp = 0$$

läßt sich ein lineares Gleichungssystem für die Entwicklungskoeffizienten aufstellen, wobei von $\mathrm{Re}(jA) = -\mathrm{Im}(A)$ Gebrauch gemacht wird. In Matrixschreibweise lautet es

$$\begin{pmatrix} M_1 & M_{12} \\ M_{21} & M_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{C}_1 \\ \vec{C}_2 \end{pmatrix} = 0 \quad , \tag{3.92}$$

dabei sind $\vec{C}_1$ und $\vec{C}_2$ die Spaltenvektoren der a_{1n}, b_{1n} und der a_{2n}, b_{2n}, M_1 und M_2 Untermatrizen, die identisch sind mit der Matrix (3.83) des Gleichungssystems für eine Einzelleitung der Breite w_1 oder w_2. Die Untermatrix M_{12} läßt sich ihrerseits aufspalten in vier weitere Untermatrizen gemäß

$$M_{12} = \begin{pmatrix} M^{12}_{yy} & M^{12}_{yz} \\ M^{12}_{zy} & M^{12}_{zz} \end{pmatrix} \tag{3.93}$$

mit den Elementen

$$M^{12}_{yymn} = \int_{-\infty}^{\infty} G_{yy}\mathrm{Re}\{\bar{F}^*_{1m}\bar{F}_{2n}e^{-j2tp}\}dp,$$

$$M^{12}_{yzmn} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}\{G^*_{zy}\bar{F}^*_{1m}\bar{G}_{2n}e^{-j2tp}\}dp, \tag{3.94}$$

$$M^{12}_{zymn} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}\{G^{*}_{zy}\bar{g}_{1m}\bar{f}^{*}_{2n}e^{j2tp}\}dp,$$

$$M^{12}_{zzmn} = \int_{-\infty}^{\infty} G_{zz}\,\mathrm{Re}\{\bar{g}_{1m}\bar{g}^{*}_{2n}e^{j2tp}\}dp\ . \qquad (3.94)$$

Entsprechend hat

$$M_{21} = \begin{pmatrix} M^{21}_{yy} & M^{21}_{yz} \\ M^{21}_{zy} & M^{21}_{zz} \end{pmatrix} \qquad (3.95)$$

die Elemente

$$M^{21}_{yymn} = \int_{-\infty}^{\infty} G_{yy}\,\mathrm{Re}\{\bar{f}_{2m}\bar{f}^{*}_{1n}e^{-j2tp}\}dp\ ,$$

$$M^{21}_{yzmn} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}\{G^{*}_{zy}\bar{f}^{*}_{2m}\bar{g}_{1n}e^{j2tp}\}dp\ ,$$

$$M^{21}_{zymn} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}\{G^{*}_{zy}\bar{g}_{2m}\bar{f}^{*}_{1n}e^{-j2tp}\}dp\ , \qquad (3.96)$$

$$M^{21}_{zzmn} = \int_{-\infty}^{\infty} G_{zz}\,\mathrm{Re}\{\bar{g}^{*}_{2m}\bar{g}_{1n}e^{j2tp}\}dp\ .$$

Ein Vergleich der beiden Untermatrizen M_{12} und M_{21} zeigt, daß der Zusammenhang

$$M_{21} = M^{T}_{12} \qquad (3.97)$$

besteht. Da M_1 und M_2 symmetrisch sind (s. Gl. (3.83)), ist auch die Gesamtmatrix für zwei unsymmetrische gekoppelte Leitungen symmetrisch.

Für den Grenzfall, daß der Abstand der beiden Leitungen sehr groß wird, sie also nicht mehr miteinander verkoppelt sind, ergibt sich für die Elemente der beiden "Kopplungsuntermatrizen" M_{21} und M_{12} im Grenzübergang [46]

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(p)e^{\pm j2tp}\,dp = 0\ . \qquad (3.98)$$

Für diesen Fall verschwinden also die beiden Untermatrizen, und es bleiben zwei ungekoppelte Gleichungssysteme für die beiden Einzelleitungen der Breite w_1 und w_2.

Mit Gln. (3.92) wurde ein Gleichungssystem angegeben, das eine im Prinzip exakte Lösung des Randwertproblems gestattet. Die numerische Auswertung erfolgt im Abschnitt 4.

3.3.2 Herleitung von stationären Ausdrücken

Im vorigen Abschnitt wurde das stationäre Funktional dazu benutzt, das Randwertproblem in ein lineares Gleichungssystem zu transformieren, mit dem es möglich ist, die Lösung für den unbekannten Strom zu gewinnen und die Dispersion der Leitung zu berechnen. In diesem Abschnitt wird das stationäre Verhalten des Funktionals zur Konstruktion von stationären Ausdrücken benutzt. Diese gestatten, einen Parameter des Feldes, hier z. B. die Wellenzahl k_z, näherungsweise zu berechnen. Ausgehend von der allgemeinen Form des stationären Funktionals Gl. (2.38) ergibt sich bei analoger Vorgehensweise wie im vorhergehenden Abschnitt ein spezielles stationäres Funktional entsprechend Gl. (3.73)

$$\int_{-\infty}^{\infty} (G_{yy}|\overline{K}_y|^2 + 2\mathrm{Re}\{G_{zy}^{*}\overline{K}_y^{*}\overline{K}_z\} + G_{zz}|\overline{K}_z|^2)\,dp = 0 \,, \qquad (3.99)$$

das nur fouriertransformierte Größen enthält. In dieser Beziehung geht die Wellenzahl k_z in die Tensorkomponenten G_{ij} ein, sie stellt damit eine stationäre implizite Bestimmungsgleichung

$$F(k_z) = 0 \qquad (3.100)$$

dar. Es läßt sich zeigen, daß der daraus berechnete Wert für k_z stationär gegenüber Variationen von Feld- und Quellenverteilung ist [22], [47]. Aus dieser stationären Formel können nun einige Sonderfälle für verschiedene Anwendungen hergeleitet werden.

Wird für eine Einzelleitung der Einfluß des Querstroms im statio-

nären Ausdruck berücksichtigt, so kann über den Ansatz

$$\bar{K}_y = \alpha \bar{f}_y \quad , \qquad \bar{K}_z = \beta \bar{f}_z \tag{3.101}$$

und Anwendung des Ritzschen Verfahrens aus Gl. (3.99) die stationäre Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_{yy} |\bar{f}_y|^2 dp \cdot \int_{-\infty}^{\infty} G_{zz} |\bar{f}_z|^2 dp - \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}\{G_{zy}^{*} \bar{f}_y^{*} \bar{f}_z\} dp\right]^2 = 0 \tag{3.102}$$

gewonnen werden, die also unabhängig von den Amplituden α und β der Probefunktionen ist.

Sowohl bei der Einzelleitung als auch bei gekoppelten Leitungen kann vielfach davon ausgegangen werden, daß der Querstrom K_y gegenüber der Längskomponente vernachläßigbar ist. Mit dieser Näherung führt Gl. (3.99) auf die sehr einfach und schnell auswertbare Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_{zz} |\bar{K}_z|^2 dp = 0 \ , \tag{3.103}$$

in der für K_z eine Probefunktion einzusetzen ist, die dem wirklichen Stromverlauf möglichst nahekommt.

Für zwei verkoppelte Leitungen kann bei Vernachlässigung der Querkomponente der Ansatz

$$K_z = \alpha f_{z1} + \beta f_{z2} \tag{3.104}$$

gemacht werden, wobei f_{z1} und f_{z2} Probefunktionen für die Ströme in den Leitungen 1 und 2, α, β deren Amplituden sind. Die Anwendung des Ritzschen Verfahrens führt auf

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_{zz} |\bar{f}_{z1}|^2 dp \cdot \int_{-\infty}^{\infty} G_{zz} |\bar{f}_{z2}|^2 dp - \left[\int_{-\infty}^{\infty} G_{zz} \mathrm{Re}\{f_{z1}^{*} \bar{f}_{z2}\} dp\right]^2 = 0, \tag{3.105}$$

also wiederum auf eine von den Amplituden unabhängige Formel.

Wird für zwei gekoppelte Leitungen gleicher Breite in einer weiteren Näherung angenommen, daß die Stromverteilungen auf beiden

Streifenleitern gleich sind, was bei schwacher Kopplung weitgehend zutrifft, so können nach dem Verschiebungssatz der Fouriertransformation die Probefunktionen in der Form

$$\bar{K}_{z1} = \bar{f}_z e^{-jtp} \quad , \quad \bar{K}_{z2} = \bar{f}_z e^{jtp} \tag{3.106}$$

angesetzt werden, wobei $\bar{f}_z$ die fouriertransformierte Stromverteilung in jedem der beiden Leiter, und t deren Verschiebung aus der gemeinsamen Mittellage (Bild 2) sind. Damit ergibt sich aus Gl. (3.105) die stationäre Formel

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} G_{zz} |\bar{f}_z|^2 \, dp\right]^2 - \left[\int_{-\infty}^{\infty} G_{zz} |\bar{f}_z|^2 \cos(2tp) dp\right]^2 = 0 \tag{3.107}$$

für "schwache" Kopplung. Sie läßt sich in zwei Gleichungen

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_{zz} |\bar{f}_z|^2 \, dp \pm \int_{-\infty}^{\infty} G_{zz} |\bar{f}_z|^2 \cos(2tp) dp = 0 \tag{3.108a, b}$$

zerlegen, deren Nullstellen den Lösungen für die beiden zu erwartenden Wellentypen entsprechen.

In alle angegebenen Ausdrücke sind geeignete Probestromverteilungen einzusetzen, um zu befriedigenden Ergebnissen für k_z zu gelangen. Diese Funktionen dürfen nur im Bereich der Streifen Werte ungleich null annehmen und müssen außerhalb verschwinden, sie sollen außerdem die wesentlichen Merkmale der Lösung haben. Wegen der Formulierung des Funktionals im Ortfrequenzbereich sind die fouriertransformierten dieser Probeverteilungen zu nehmen. Die numerische Auswertung erfolgt im Abschnitt 4.

Wenn auch das Galerkinverfahren aus Abschnitt 3.3.1 und die in diesem Abschnitt hergeleiteten stationären Ausdrücke die gleiche Grundlage, nämlich das stationäre Funktional Gl. (2.38), haben, so sind ihre Anwendungsbereiche doch unterschiedlich. Das Galerkinverfahren dient der Ermittlung einer umfassenden Lösung des jeweiligen Problems, hier z. B. der Stromverteilung auf den Streifenleitern. Die stationären Ausdrücke hingegen werden zur Bestimmung nur eines Parameters der Lösung, hier z. B. der Wellenzahl k_z, angewandt. Dabei müssen die wesentlichen Merk-

male der Lösung bereits bekannt sein, um eine gute Näherung für k_z zu erhalten. Dasselbe gilt auch für die aus dem Galerkinverfahren hergeleiteten sogenannten "Eintermansätze" [29], [44], [45]. Sie sind in den meisten Fällen stationäre Ausdrücke. Statt zunächst den ganzen Formalismus für das Galerkinverfahren herzuleiten und es dann nur für einen Term zu benutzen, scheint es indessen sinnvoller, den hier eingeschlagenen Weg über ein stationäres Funktional zu wählen, weil so der Aufwand bei der analytischen Herleitung reduziert, und der Charakter eines stationären Ausdrucks deutlich werden.

4. Numerische Auswertung und Ergebnisse für zwei gekoppelte Leitungen gleicher Breite

4.1 Berechnung nach der Momentenmethode

4.1.1 Einzelleitung

Als Vorbereitung für das Problem der gekoppelten Leitungen wird zunächst das der Einzelleitung nach dem oben entwickelten Verfahren behandelt. Bei der numerischen Auswertung des in Abschnitt 3.3 hergeleiteten Gleichungssystems zur Beschreibung der Ferritstreifenleitung spielt die Auswahl geeigneter Entwicklungsfunktionen für die Oberflächenstromdichte $\vec{K}$ eine ganz entscheidende Rolle. Durch sie werden die Genauigkeit der Lösung und der numerische Aufwand wesentlich bestimmt. Bei der Berechnung ähnlicher planarer Leitungsstrukturen auf dielektrischem Substrat hat es sich als sinnvoll erwiesen, die von den Strömen zusätzlich zu erfüllende Kantenbedingung [30], [44] bereits in den Entwicklungsfunktionen zu berücksichtigen, also eine Polstelle für die Längskomponente K_z der Oberflächenstromdichte an den Kanten der Streifen und das Verschwinden der Querkomponente vorzusehen. Wie bereits geschildert, können bei magnetisiertem Substrat von vornherein keine Symmetrieeigenschaften für die Felder angegeben werden, die Entwicklungsfunktionen müssen also gerade und ungerade Anteile enthalten. Diesen Überlegungen folgend werden hier die Funktionen herangezogen, die bereits in [33] zur Berechnung der Einzelleitung angegeben wurden:

$$K_y(y) = j \sum_n a_n f_n(y) = j \frac{2}{w} \sum_n a_n \sin\{\frac{n\pi}{2}(\frac{2y}{w} + 1)\} \quad , \; n = 1,2,3,\ldots$$

$$K_z(y) = \sum_n b_n g_n(y) = \frac{4}{\pi w} \sum_n b_n \frac{\cos\{\frac{n\pi}{2}(\frac{2y}{w} + 1)\}}{\sqrt{1 - (\frac{2y}{w})^2}} \quad , \; n = 0,1,2,\ldots \tag{4.1}$$

$$-\frac{w}{2} \leq y \leq \frac{w}{2} \quad .$$

Diese Funktionen sind auf dem ganzen Bereich des Streifens

definiert und verschwinden außerhalb. Zur Auswertung des Gleichungssystems (3.81) werden die Fouriertransformierten dieser Funktionen benötigt. Mit den Symmetrieeigenschaften in der Ortfrequenzvariablen p lauten sie für

n gerade (v = n/2):

$$\bar{f}_n(p) = jn\pi \sin(\tfrac{wp}{2})/\{(\tfrac{n\pi}{2})^2 - (\tfrac{wp}{2})^2\} = -\bar{f}_n(-p) \ ,$$

$$\bar{g}_n(p) = (-1)^v\{J_o(\tfrac{n\pi}{2} + \tfrac{wp}{2}) + J_o(\tfrac{n\pi}{2} - \tfrac{wp}{2})\} = \bar{g}_n(-p) \quad , \tag{4.2}$$

n ungerade (v = (n + 1)/2):

$$\bar{f}_n(p) = n\pi \cos(\tfrac{wp}{2})/\{(\tfrac{n\pi}{2})^2 - (\tfrac{wp}{2})^2\} = \bar{f}_n(-p) \quad ,$$

$$\bar{g}_n(p) = j(-1)^v\{J_o(\tfrac{n\pi}{2} + \tfrac{wp}{2}) - J_o(\tfrac{n\pi}{2} - \tfrac{wp}{2})\} = -\bar{g}_n(-p) \ . \tag{4.3}$$

Im weiteren werden in Gl. (4.2) $\bar{f}_n(p)$ durch $j\bar{f}_n(p)$ und in Gl. (4.3) $\bar{g}_n(p)$ durch $j\bar{g}_n(p)$ ersetzt. Durch diese Maßnahme lassen sich alle $\bar{f}_n$ und $\bar{g}_n$ reell schreiben.

Die Integration der Matrixelemente aus Gl. (3.81) erstreckt sich auf den Bereich von $-\infty$ bis $+\infty$ und muß wegen des komplizierten Integranden numerisch durchgeführt werden. Für eine ökonomische numerische Auswertung ist es sinnvoll, den Integranden in seinen geraden und ungeraden Anteil zu zerlegen, da nur der gerade Anteil zum Integral beiträgt. Bei Beachtung der Symmetrieeigenschaften für die Elemente des Greenschen Tensors G_{ij} - Gln. (3.20), (3.30), (3.33), (3.34) - und für die Ströme Gln. (4.2), (4.3) lassen sich die in Gl. (3.81) auftretenden Integrale in verschiedene Gruppen einteilen:

m, n gerade

$$M_{yzmn} = -\int_0^\infty \mathrm{Re}\{G_{zy}\}\bar{f}_m\bar{g}_n dp$$

m, n ungerade

$$= \int_0^\infty \mathrm{Re}\{G_{zy}\}\bar{f}_m\bar{g}_n dp \ ,$$

$$M_{yymn} = \int_0^\infty G_{yy}\bar{f}_m\bar{f}_n dp \ , \qquad (4.4)$$

$$M_{zzmn} = \int_0^\infty G_{zz}\bar{g}_m\bar{g}_n dp \ ,$$

m gerade, n ungerade

m ungerade, n gerade

$$M_{yymn} = 0, \ M_{zzmn} = 0 \ ,$$

$$M_{yzmn} = -\int_0^\infty \mathrm{Im}\{G_{zy}\}\bar{f}_m\bar{g}_n dp \ . \qquad (4.5)$$

Die numerische Integration dieser Integrale geschieht durch Gauß-Quadratur [48] mit variablem Integrationsbereich. Ein Großteil des Aufwands liegt bei der numerischen Berechnung des Integranden an den Stützstellen p_k, und hier wiederum bei dem von m und n unabhängigen Teil. Es ist daher sinnvoll, diesen Teil beim ersten Durchlauf in ein Feld abzuspeichern und bei den weiteren Durchläufen für verschiedene m und n darauf zurückzugreifen. Durch diese Maßnahme wird erheblich Rechenzeit eingespart. Das so entstehende Gleichungssystem muß zur numerischen Auswertung bei n = N abgebrochen werden. Wenn die Geometrie- und Materialdaten gegeben sind, hängen die Elemente der Matrix bei fester Frequenz nur noch von k_z ab. Die Bedingung

$$\mathrm{Det}\{\mathbf{M}(k_z)\} = 0 \qquad (4.6)$$

für eine eindeutige Lösung des homogenen Gleichungssystems (3.81) führt auf eine implizite, nichtlineare Bestimmungsgleichung für die Wellenzahl k_z. Die Berechnung der Determinante, die Lösung der nichtlinearen Gleichung (4.6) und Auflösung des Gleichungssystems werden mit üblichen numerischen

Verfahren durchgeführt [48], [49]. Ist eine Lösung für k_z gewonnen, können das Gleichungssystem (3.81) nach den Entwicklungskoeffizienten a_n und b_n aufgelöst und daraus der Strom und die Feldverteilung berechnet werden.

Durch die mit Gl. (3.83) beschriebene Symmetrie der Matrix und wegen des Verschwindens einiger Matrixelemente aufgrund von $\mathrm{Im}\{G_{yy}\} = \mathrm{Im}\{G_{zz}\} = 0$, Gl. (4.5), ist dieses Verfahren dem eingangs zitierten, ebenfalls das Galerkinverfahren benützenden [33] in der Rechenzeit überlegen. Bei vergleichenden Berechnungen wurde eine Verringerung um mehr als 30% festgestellt.

Würde zur Verminderung des numerischen Aufwands als Näherung der Querstrom gegenüber dem Längsstrom vernachlässigt, wie es bei ähnlichen planaren Strukturen üblich ist, so reduziert sich das Gleichungssystem (3.81) auf

$$M_{zz}\vec{B} = 0 \ . \tag{4.7}$$

Unter Beachtung der Eigenschaft der Koeffizientenmatrix M_{zz} aus Gl. (4.5) - das Verschwinden der Elemente für m ungerade, n gerade und m gerade, n ungerade - ergibt sich die Form

$$\begin{pmatrix} 0 & M_u \\ M_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{B}_g \\ \vec{B}_u \end{pmatrix} = 0 \ , \tag{4.8}$$

wobei $\vec{B}_g$ der Spaltenvektor der Entwicklungskoeffizienten der geraden, $\vec{B}_u$ der der ungeraden Entwicklungsfunktionen sind. In diesem Gleichungssystem sind gerade und ungerade Funktionen entkoppelt. Da bei dem hier vorliegenden Problem, im Gegensatz zum isotropen Substrat eine gerade oder ungerade Funktion allein keine Eigenlösung darstellt, würde diese Näherung zu einem falschen Ergebnis für den Strom führen. Erst die Berücksichtigung von Längs- u n d Querkomponente des Stromes liefert eine Lösung, die einem unsymmetrischen Feldzustand wie z. B. der kantengeführten Welle entspricht.

4.1.2 Zwei gekoppelte Leitungen

Das Gleichungssystem (3.92) war so hergeleitet worden, daß weiterhin die Entwicklungsfunktionen für die Einzelleitung herangezogen werden können. Im Gegensatz zum isotropen Substrat ist es wiederum nicht möglich Symmetrieeigenschaften vorauszusetzen. Gl. (3.92) lautet daher für zwei Leitungen gleicher Breite

$$\begin{pmatrix} M_1 & M_{12} \\ M_{12}^T & M_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\tilde{c}}_1 \\ \underline{\tilde{c}}_2 \end{pmatrix} = 0 \; . \qquad (4.9)$$

Würde in einer Näherung zur Lösung dieses Gleichungssystems der Querstrom gegenüber dem Längsstrom vernachlässigt, so würden sich als Lösungen für den Längsstrom wieder entkoppelte gerade oder ungerade Funktionen ergeben, die jedoch den Vorgang nicht richtig beschreiben. Diese Näherung würde also, wie schon im Fall der Einzelleitung, zu einem falschen Ergebnis für den Strom führen.

Die Integrale der Untermatrix M_{12} lassen sich zur ökonomischen numerischen Auswertung wieder in verschiedene Klassen zerlegen, die im Anhang, Abschnitt 8.5, angegeben sind. Ansonsten gilt für die numerische Auswertung das zur Einzelleitung Gesagte.

Für den Aufwand bei der numerischen Auswertung des Gleichungssystems (4.9) spielt neben der numerischen Integration die obere Grenze N, bei der die Reihenentwicklung für den Strom abgebrochen wird, eine entscheidende Rolle. Vergleichende Berechnungen haben ergeben, daß für N = 4 ein relativer Fehler kleiner als 0,001 bezogen auf N = 20 erreicht wird. Daher wird bei den folgenden Berechnungen N = 4 vorausgesetzt. Obwohl sich nicht mehr nur gerade oder ungerade Funktionen als Lösungen ergeben, wird weiter die Bezeichung "gerade" für den Fall glei-

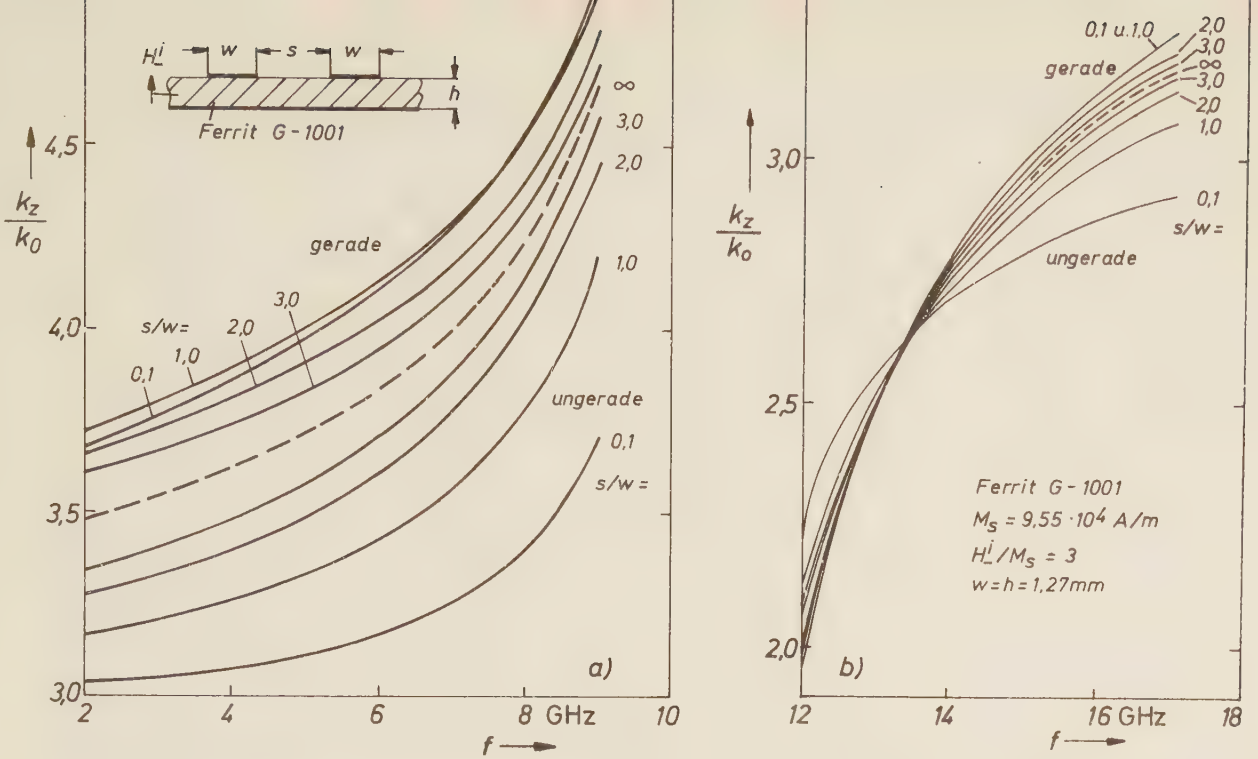


Bild 5. Dispersion zweier gekoppelter Mikrostreifenleitungen gleicher Breite auf magnetisiertem Ferritsubstrat für verschiedene Leiterabstände (s/w = ∞: Einzelleitung). Kurven berechnet nach der Momentenmethode.

cher Vorzeichen von K_z und "ungerade" für verschiedene Vorzeichen von K_z auf beiden Streifenleitern beibehalten. Die Berechnungen und Messungen (s. Abschnitt 5) werden für zwei Ferrite durchgeführt:

- G-1001, mit der Sättigungsmagnetisierung $M_s \approx 9{,}55 \cdot 10^4$ A/m $\triangleq$ 1200 Oe und $\varepsilon_r = 15{,}2$ *)
- TT1-105, mit $M_s = 1{,}39 \cdot 10^5 \triangleq 1750$ Oe und $\varepsilon_r = 12{,}9$ *).

Bild 3 zeigt die berechneten Dispersionskurven (Wellenzahlverhältnis k_z/k_o als Funktion der Frequenz) für 4 verschiedene Leiterabstände, wobei im Bereich $\mu < 0$ (Umgebung der ferrimagnetischen Resonanz, $f_R \approx 10$ GHz) keine Lösungen mit reellem k_z auftreten. Für größer werdende s/w, also für schwächere Kopplung streben die Kurven erwartungsgemäß zusammen und gehen schließlich gegen die der Einzelleitung. Wie auch im Fall der entsprechenden Leitungsstruktur auf dielektrischem Substrat [50] verläuft die Dispersion für den geraden Wellentyp nicht monoton mit stärkerer Kopplung: für starke Kopplung nimmt k_z/k_o wieder ab und strebt schließlich gegen den Wert für die Einzelleitung mit doppelter Breite. Bemerkenswert sind die Unterschiede unterhalb und oberhalb der ferrimagnetischen Resonanz. Für denselben Wert von s/w ist der Abstand der Kurven für den geraden und den ungeraden Wellentyp unterhalb f_R wesentlich größer als oberhalb, und unterhalb f_R gilt stets $k_{zg} > k_{zu}$ (Bild 3a). Oberhalb f_R gibt es zunächst einen Bereich, in dem $k_{zg} < k_{zu}$ ist, und dieses Verhalten wird mit stärkerer Kopplung deutlicher, (Bild 3b). Nach dem Schnittpunkt beider Kurven ist k_{zg} wieder größer als k_{zu}, wie unterhalb f_R. Dieser Befund ist charakteristisch und tritt bei allen Berechnungen auch für andere Leitungsparameter auf.

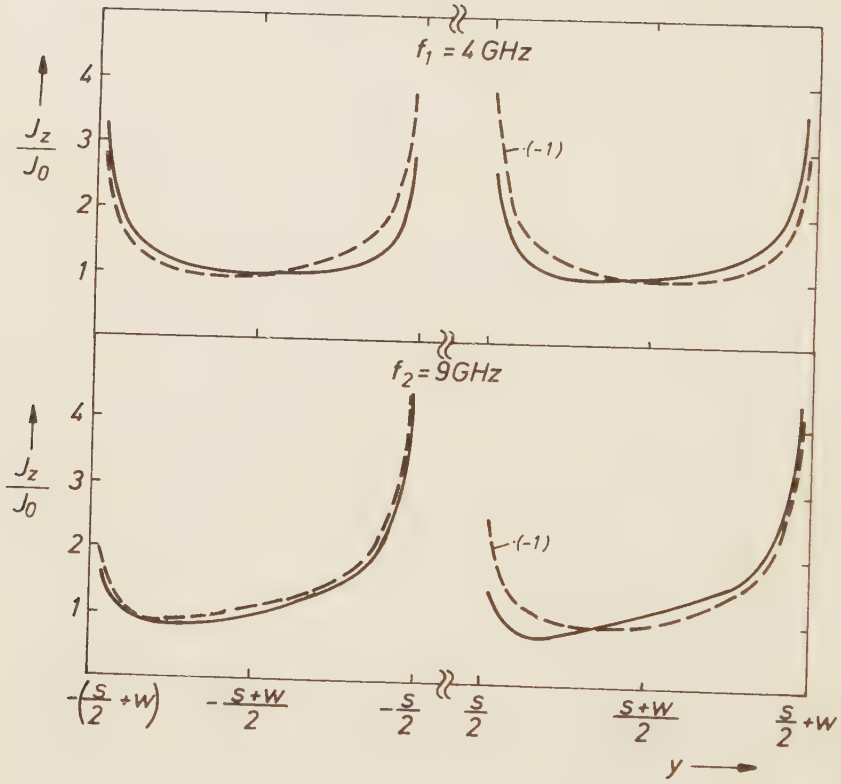
Einen weiteren Einblick in das Verhalten der beiden Wellentypen gibt der Verlauf der Längskomponenten des Stromes auf beiden

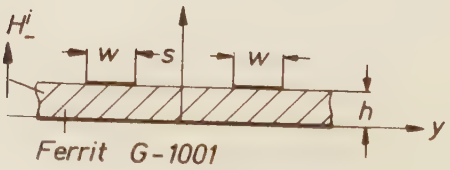
---

*) Material der Firma Trans-Tech, Inc. Materialdaten nach Angaben des Herstellers.

Streifenleitern. Bild 4 zeigt diesen Verlauf bei festen Leiterabständen s/w = 1 für 4 Frequenzen. Dabei liegen f_1 = 4 GHz und f_2 = 9 GHz unterhalb, f_3 = 13 GHz und f_4 = 17 GHz oberhalb der Frequenz f_R der ferrimagnetischen Resonanz. Wie bei der Dispersion (Bild 3) ist ein deutlicher Unterschied im Verlauf unterhalb und oberhalb von f_R zu beobachten. Für Frequenzen unterhalb f_R ergeben sich schon in einigem Abstand von f_R eine bezüglich der Mitte der Struktur gerade und eine ungerade Stromverteilung wie im isotropen Fall (f_1). Mit zunehmender Annäherung an f_R tritt eine stärker werdende Unsymmetrie auf, die durch die gyrotropen Materialeigenschaften bedingt ist (f_2). Diese Unsymmetrie äußert sich u. a. in der Konzentration des Stromes an einer - unterhalb und oberhalb f_R jeweils anderen - Kante der Streifenleiter. Bei f_2, f_3 und f_4 ist ein nichtreziprokes Verhalten der Kopplung zu erkennen. Jeweils auf dem Streifenleiter, bei dem die Stromkonzentration an der innen liegenden Kante auftritt, zeigen die Stromverläufe für den geraden und ungeraden Wellentyp kaum sichtbare Abweichungen voneinander, und damit vom Verlauf des Stromes in einer Einzelleitung (f_2 linker Streifen; f_3, f_4 rechter Streifen). Der Strom auf diesen Streifenleitern wird daher durch die Kopplung kaum beeinflußt. Auf dem jeweils anderen Streifenleiter treten, bedingt durch die Kopplung, andere Stromverteilungen auf. Dieser nichtreziproke Effekt erstreckt sich oberhalb f_R über einen größeren Frequenzbereich als unterhalb f_R: während für f_1 bereits weitgehend symmetrischer Verlauf vorliegt, tritt oberhalb der ferrimagnetischen Resonanz bei f_4 noch ein stark unsymmetrischer und von der Einzelleitung abweichender Verlauf auf.

Bild 5a, b, c zeigt den Verlauf der Ströme auf beiden Streifenleitern bei verschiedenen Leiterabständen für zwei Frequenzen f_1 = 9 GHz < f_R und f_2 = 15 GHz > f_R. Bei großem Leiterabstand s/w = 2 wirkt sich die Kopplung nur geringfügig auf die Stromverteilung der beiden Streifenleiter aus: beide zeigen nahezu gleichen und daher mit dem der Einzelleitung über-





$M_s = 9{,}55 \cdot 10^4\ A/m$

$H_-^i / M_s = 3$

$s = w = h = 1{,}27\,mm$

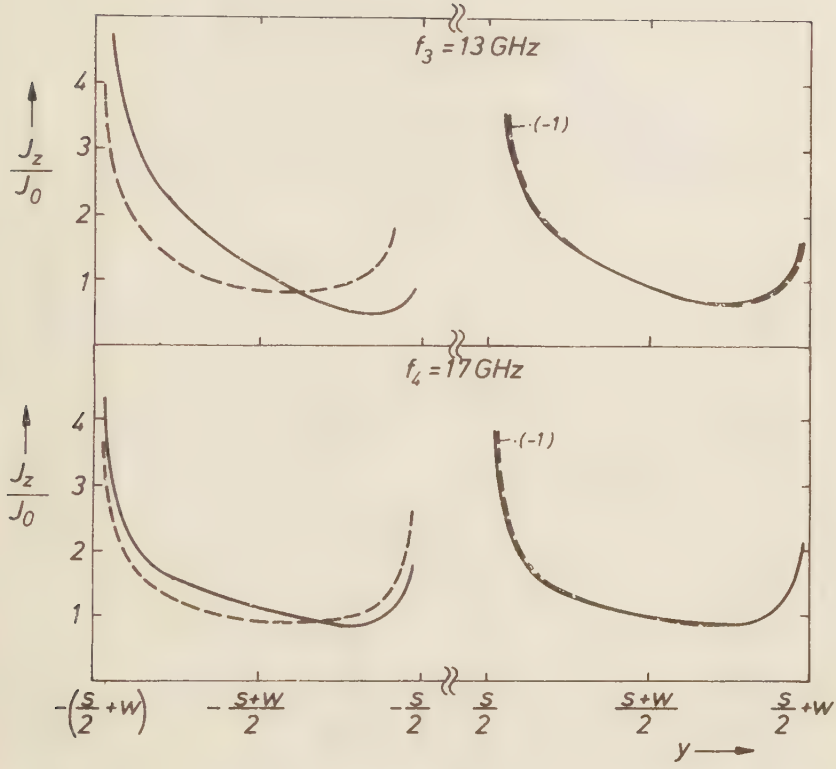


Bild 4. Verlauf der Längskomponente der normierten Oberflächenstromdichte auf beiden Streifenleitern für den geraden (———) und ungeraden (– – –) Wellentyp bei festem Leiterabstand für vier verschiedene Frequenzen. (Beim ungeraden Wellentyp hat der Strom auf beiden Streifenleitern entgegengesetztes Vorzeichen.

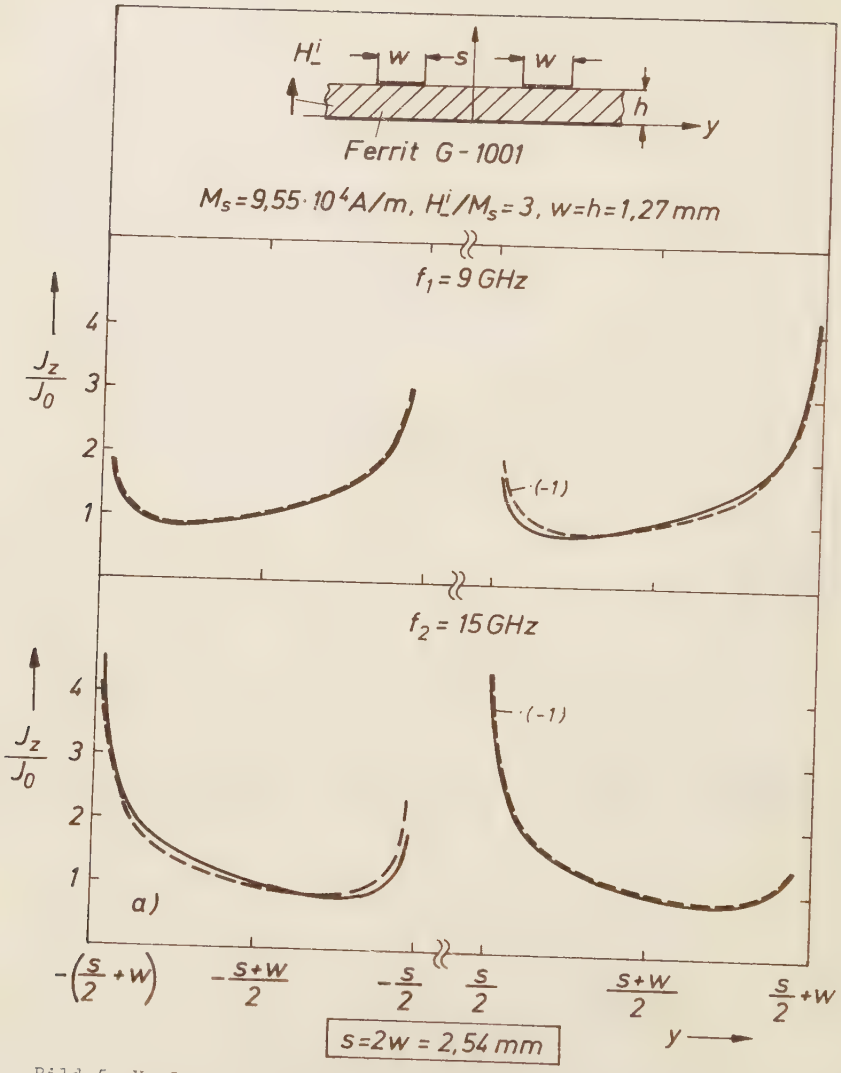
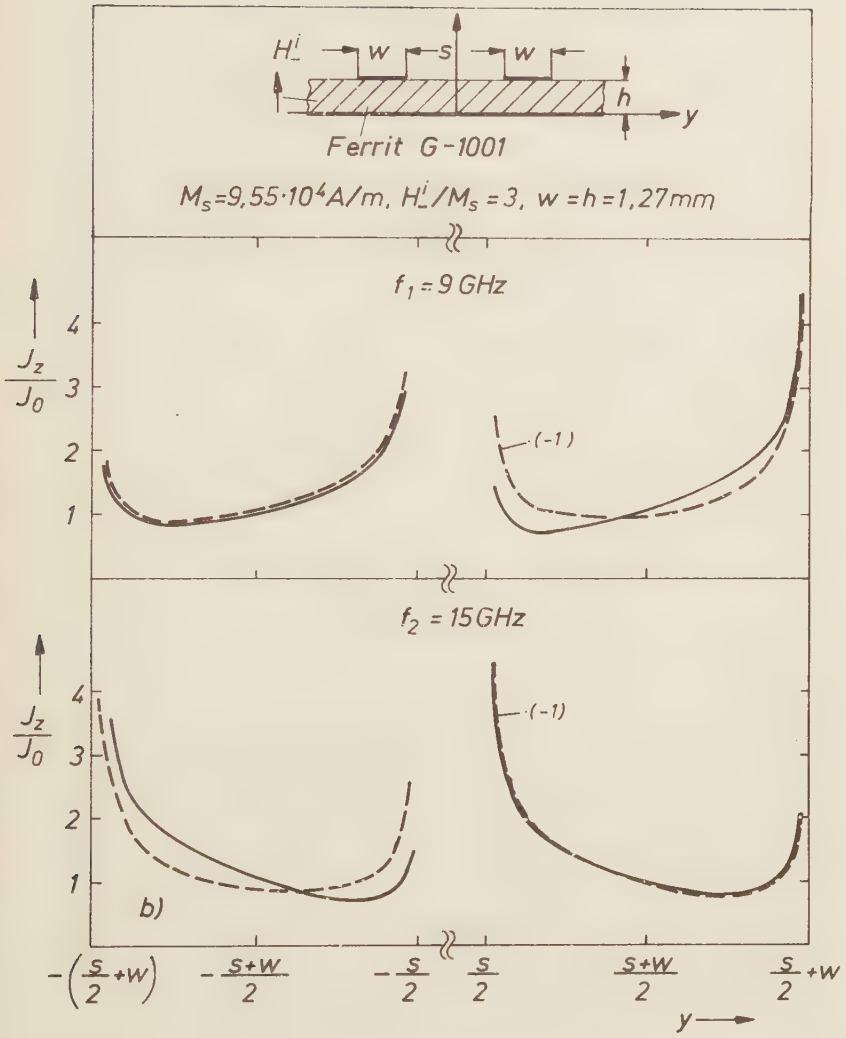
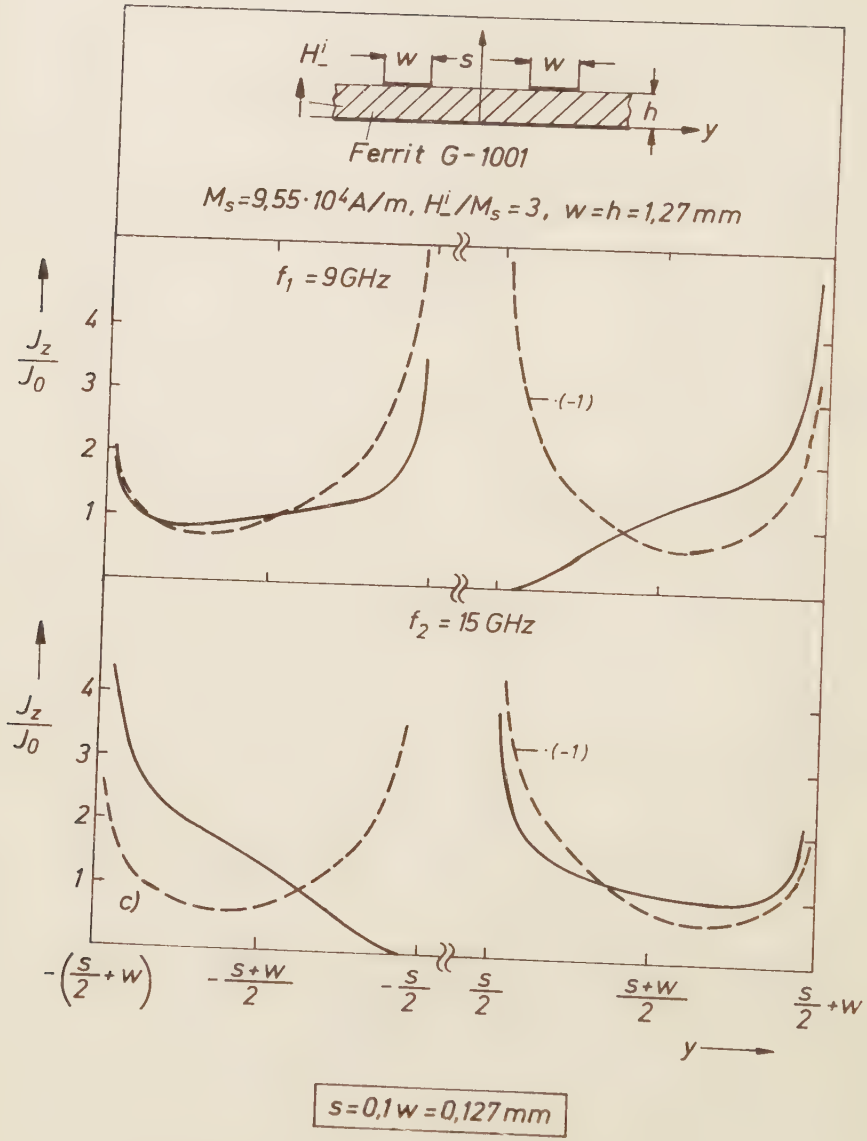


Bild 5. Verlauf der Längskomponente der normierten Oberflächenstromdichte auf beiden Streifenleitern für den geraden (———) und ungeraden (– – –) Wellentyp bei verschiedenen Leiterabständen für zwei Frequenzen. (Beim ungeraden Wellentyp hat der Strom auf beiden Streifenleitern entgegengesetztes Vorzeichen).


H_-^i
w
s
w
h
y
Ferrit G-1001
$M_s = 9{,}55 \cdot 10^4$ A/m, $H_-^i / M_s = 3$, $w = h = 1{,}27$ mm
$f_1 = 9$ GHz
$\frac{J_z}{J_0}$
4
3
2
1
(-1)
$f_2 = 15$ GHz
$\frac{J_z}{J_0}$
4
3
2
1
(-1)
b)
$-\left(\frac{s}{2}+w\right)$
$-\frac{s+w}{2}$
$-\frac{s}{2}$
$\frac{s}{2}$
$\frac{s+w}{2}$
$\frac{s}{2}+w$
y

$s = w = 1{,}27$ mm


H_-^i
w
s
w
h
y
Ferrit G-1001
$M_s = 9{,}55 \cdot 10^4 A/m$, $H_-^i/M_s = 3$, $w = h = 1{,}27 mm$
$f_1 = 9 GHz$
$\frac{J_z}{J_0}$
4
3
2
1
·(-1)
$f_2 = 15 GHz$
$\frac{J_z}{J_0}$
4
3
2
1
·(-1)
c)
$-\left(\frac{s}{2}+w\right)$
$-\frac{s+w}{2}$
$-\frac{s}{2}$
$\frac{s}{2}$
$\frac{s+w}{2}$
$\frac{s}{2}+w$
y

$s = 0{,}1\, w = 0{,}127 mm$

einstimmenden Verlauf. Mit kleiner werdendem Leiterabstand s/w = 1 tritt der oben beschriebene nichtreziproke Charakter der Kopplung auf: auf einem der beiden Streifenleiter (f_1 links, f_2 rechts) ergeben sich wieder der Verlauf wie auf der Einzelleitung, und auf dem jeweils anderen ein davon abweichender. Für sehr kleinen Leiterabstand s/w = 0,1 stellt sich eine sehr unterschiedliche Stromverteilung auf beiden Streifenleitern ein. Während für den ungeraden Wellentyp durch den Einfluß der Kopplung ein nahezu ungerader Verlauf bezüglich der Mitte der Struktur zustande kommt, ergibt sich für den geraden Wellentyp ein unregelmäßiger Verlauf. Für beide Frequenzen ist auch bei dieser Kopplung der nichtreziproke Charakter der Kopplung erkennbar.

4.2 Berechnung mittels stationärer Formel

4.2.1 Einzelleitung

Wird lediglich der Dispersionsverlauf gewünscht, so kann das Ergebnis wesentlich schneller als mit dem vorher beschriebenen Verfahren durch einen stationären Ausdruck für die Wellenzahl k_z erhalten werden. Die einfachste und schnellste Möglichkeit bietet dabei der stationäre Ausdruck (3.103), in dem der Querstrom vernachlässigt wird. Um mit der Probestromverteilung der nach dem Galerkinverfahren in Abschnitt 4.1.1 gefundenen Lösung für den Strom auf einer Einzelleitung nahe zu kommen, bietet sich die Überlagerung aus einem geraden und einem ungeraden Anteil an. Dabei werden für den geraden Anteil K_{zg} Verläufe, wie sie in Bild 6a und b dargestellt sind, für den ungeraden Anteil K_{zu} ein Verlauf wie in Bild 6c angenommen. Die formelmäßigen Beziehungen und deren Fouriertransformierten sind im Anhang, Abschnitt 8.6 angegeben. Wird nun als Probefunktion

$$K_z = K_{zg} + \alpha K_{zu} \tag{4.10}$$

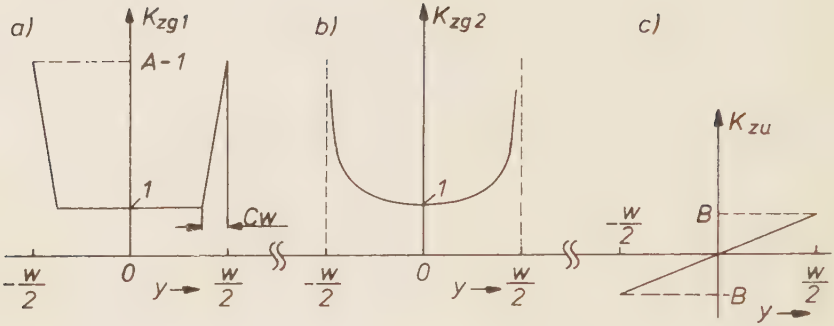


Bild 6. Gerader (a, b) und ungerader (c) Anteil der Probestromverteilung auf dem Streifenleiter einer Einzelleitung.

mit α als Variationsparameter in Gl. (3.103) eingesetzt, so kann durch Variation von α das stationäre Verhalten des Ausdrucks untersucht werden [47]. Dabei stellt sich heraus, daß der stationäre Punkt bei α = 0 liegt, also bei einer Probefunktion o h n e ungeraden Anteil. Dies entspricht der bereits in Abschnitt 4.1.1 festgestellten Tatsache, daß bei Vernachlässigung des Querstroms für den Längsstrom eine gerade Funktion resultiert. Bei geeigneter Wahl der Parameter ergeben sich für die Probefunktionen nach Bild 6a und b nur geringfügige Unterschiede in der Wellenzahl k_z. Die Stromverteilung nach Bild 6a benötigt aufgrund der schnelleren Konvergenz eine etwas kürzere Rechenzeit bei der numerischen Integration.

Um die Leistungsfähigkeit der stationären Formel zu testen, wurden drei andere Berechnungsverfahren, nämlich 1) die Momentenmethode, 2) das mode matching-Verfahren und 3) die quasiisotrope Approximation in Verbindung mit dem mode matching-Verfahren zum Vergleich herangezogen. Für nach diesen Verfahren behandelte Einzelleitungen und vorliegende numerische Ergebnisse

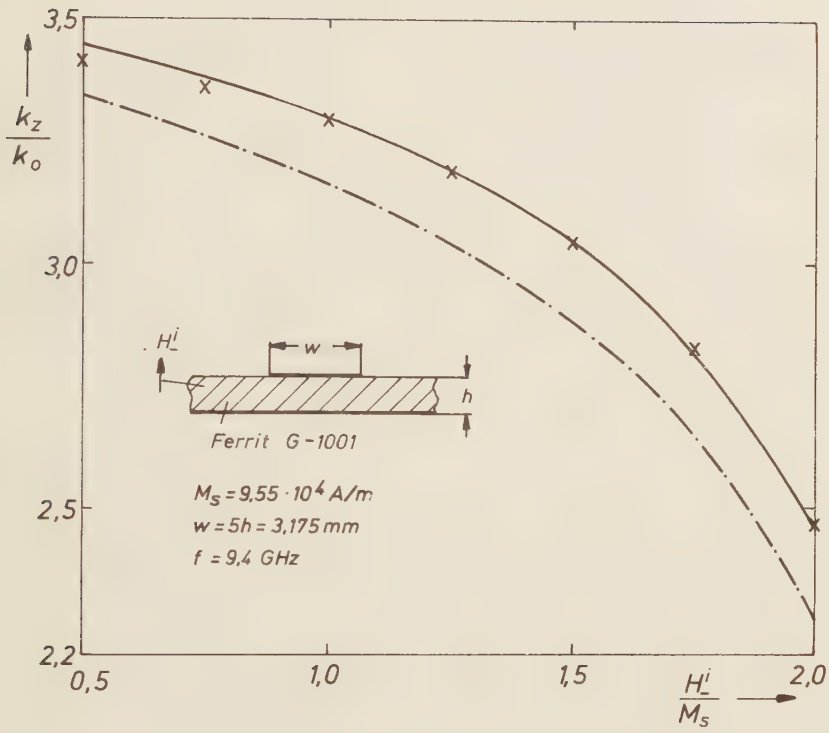


Bild 7. Wellenzahl der kantengeführten Welle einer Mikrostreifenleitung auf Ferritsubstrat in Abhängigkeit vom statischen Magnetfeld, berechnet mit Hilfe

- des stationären Ausdrucks (———), Probefunktion aus Bild 6a (A = 4,5, C = 0,05),
- der Momentenmethode [33] (x),
- des mode matching-Verfahrens [34] (—·—·—).

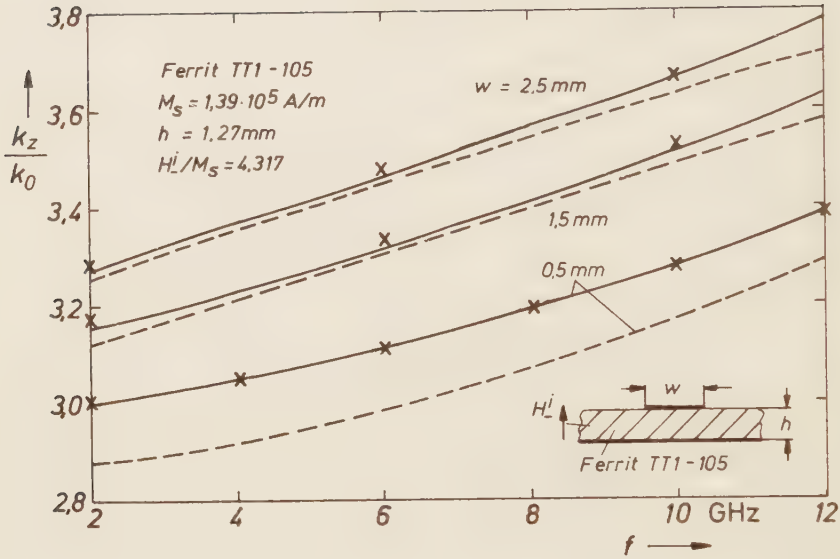


Bild 8. Dispersion einer Mikrostreifenleitung auf magnetisiertem Ferritsubstrat für verschiedene Streifenleiterbreiten, berechnet mit Hilfe

- des stationären Ausdrucks (———), Probefunktion aus Bild 6a (A = 4,5, C = 0,05),
- der Momentenmethode (x),
- der quasiisotropen Approximation [32] (– – – –).

für k_z wurde die stationäre Formel, wie beschrieben, ausgewertet. Bild 7 zeigt gute Übereinstimmung mit dem Verfahren (1) [33] und höhere Werte als Verfahren (2) [34]. Der Vergleich mit dem Verfahren (3) [32] in Bild 8 zeitigt eine beträchtliche Abweichung für die Streifenleiterbreite w = 0,5mm. Zur Klärung wurde der Verlauf von k_z nach der Momentenmethode berechnet, die das Ergebnis der stationären Formel bestätigt.

Weitere hier nicht wiedergegebene Berechnungen zeigen, daß sich erst für breitere Streifenleiter Abweichungen in den Ergebnissen von stationärem Ausdruck und Momentenmethode ergeben, die mit Annäherung an die ferrimagnetische Resonanz zunehmen. Diese Abweichungen lassen sich unter Hinzunahme des Querstroms im stationären Ausdruck (3.102) reduzieren [47].

4.2.2 Zwei gekoppelte Leitungen

Wird in den stationären Ausdruck für die gekoppelten Leitungen Gl. (3.105) zunächst für jeden Streifenleiter eine Stromverteilung aus geradem und ungeradem Anteil entsprechend Bild 6 mit unterschiedlicher Steigung des ungeraden Anteils auf beiden Leitern (Bild 6c, unterschiedliche B-Werte) eingesetzt, so zeigt sich daß der stationäre Punkt erreicht wird, wenn die ungeraden Anteile auf beiden Streifenleitern bis aufs Vorzeichen gleich sind. Dies ist in Übereinstimmung mit der Tatsache, daß bei Vernachlässigung des Querstroms keine unsymmetrischen Feldzustände beschrieben werden können. Als Probefunktionen sind also eine gerade und eine ungerade Funktion mit gleichem B-Wert für beide Streifenleiter zu wählen, und in den stationären Ausdruck (3.105) einzusetzen.

Auf diese Weise wurde ein Satz von Dispersionskurven für verschiedene Leiterabstände berechnet (Bild 9). Auch der stationäre Ausdruck gibt Verläufe wieder, wie sie nach der Momentenmethode gewonnen wurden (vergl. Bild 3): stärkere Aufspaltung zwischen geradem und ungeradem Wellentyp unterhalb der ferri-

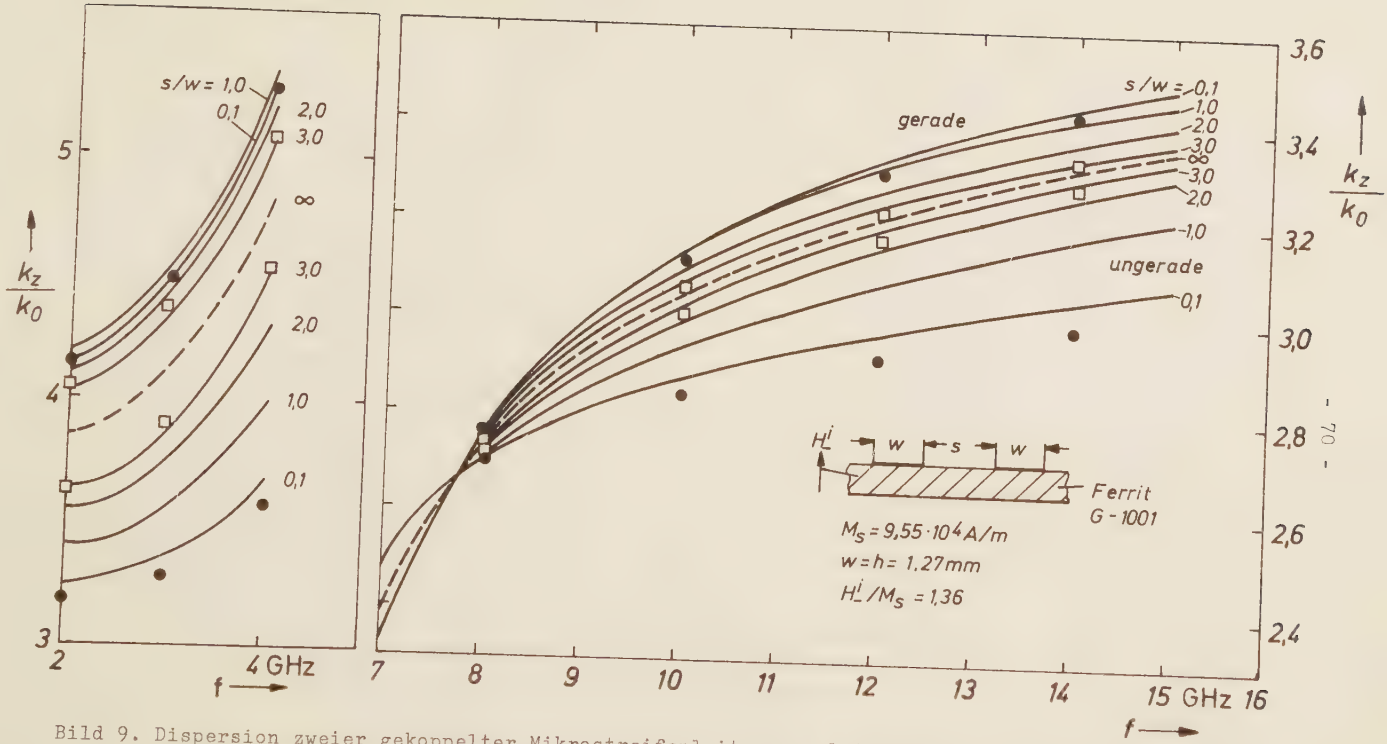


Bild 9. Dispersion zweier gekoppelter Mikrostreifenleitungen gleicher Breite auf magnetisiertem Ferritsubstrat für verschiedene Leiterabstände (s/w = ∞: Einzelleitung), Kurven berechnet mit stationärem Ausdruck, Probefunktion aus Bild 6a (A = 4,5, C = 0,05) und 6c (B = 0). Punkte berechnet nach der Momentenmethode: • s/w = 0,1, □ s/w = 3.

magnetischen Resonanz (hier bei f_R = 4,55 GHz *)), nichtmonotoner Verlauf von k_{zg} mit stärker werdender Kopplung, $k_{zu} > k_{zg}$ in einem schmalen Frequenzbereich unmittelbar oberhalb f_R. Zur Beurteilung der Genauigkeit wurden einige nach der genaueren Momentenmethode berechneten Punkte mit eingetragen. Es zeigt sich, daß für schwächere Kopplung eine weitgehende Übereinstimmung der Ergebnisse vorliegt. Für stärkere Kopplung (s/w = 0,1) werden wegen der Vernachlässigung des Querstroms die Abweichungen erwartungsgemäß größer, insbesondere beim ungeraden Wellentyp. Angesichts der numerischen Effizienz des stationären Ausdrucks ist es indessen in vielen praktischen Fällen gerechtfertigt, diese Abweichungen in Kauf zu nehmen, wenn nur die Dispersion bestimmt werden soll. Auch hier könnte durch Berücksichtigung der Querkomponente wieder eine bessere Übereinstimmung erzielt werden, allerdings würde dafür eine größere Rechenzeit erforderlich.

Nachdem auch die Stromverteilung auf den Streifenleitern als Lösung aus der Momentenmethode bekannt ist, kann mit Hilfe der im Anhang, Abschnitt 8.4, angegebenen Elemente des Greenschen Tensors die Feldverteilung in der Transversalebene berechnet werden [59].

---

*) Es wurde bewußt ein anderer H_-^i/M_s-Wert und damit ein anderes f_R gewählt, um ein weiteres numerisches Beispiel zu haben.

5. Messungen

Das Problem der Messung der Phasenkonstante von Streifenleitungen auf magnetisiertem Ferritsubstrat ist in [51] ausführlich behandelt worden. Hier sollen darüberhinausgehende Gesichtspunkte diskutiert werden, die für entsprechende Messungen bei gekoppelten Leitungen zutreffen.

Die Wellenzahl oder Phasenkonstante k_z wird nach der Resonatormethode bestimmt, bei der sie aus gemessenen Resonanzfrequenzen von Leitungsresonatoren ermittelt wird. Voraussetzung dafür ist, daß die Randbedingungen an den Enden des Resonators durch die Überlagerung eines einzigen Paares hin- und rücklaufender Wellen mit derselben Wellenzahl erfüllt werden können. Dann besteht ein eindeutiger Zusammenhang zwischen der Resonanzfrequenz f_n einer Eigenschwingung der Ordnung n des Resonators der Länge l und der nach Gl. (3.38) definierten normierten Phasenkonstante

$$\frac{k_z}{k_o} = \frac{\lambda_o}{\lambda_g} = \frac{c\, n}{f_n\, 2l} \,, \tag{5.1}$$

wobei n Vielfache der halben Leitungswellenlänge λ_g auf der Länge l des Resonators auftreten, und c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist.

Als Abschlüsse, die ein resonanzfähiges Gebilde entstehen lassen, kommen hier Kurzschluß und Leerlauf in Frage. Ein idealer Leerlauf läßt sich auf der offenen Struktur nicht realisieren, das Feld reicht über das offene Ende des Leitungsstücks hinaus, was sich wie eine geringfügige Leitungsverlängerung auswirkt ("Endeffekt"), die zu einer entsprechenden Verschiebung der Resonanzfrequenz führt. Um aus Gl. (5.1) k_z bestimmen zu können, muß diese äquivalente Leitungsverlängerung bekannt sein. Es mag daher nahe liegen, einen Kurzschlußresonator einzusetzen. Bei Mikrostreifenleitungen auf Ferritsubstrat treten jedoch auch dabei Probleme auf. Bei der Richtung des statischen Magnetfeldes

senkrecht zur Substratebene ist die Wellenleitung bidirektional (s. Abschnitt 3.1), d. h. es existiert zwar zu jeder hinlaufenden Welle mit der Wellenzahl k_z auch eine rücklaufende mit $-k_z$, die jedoch nicht reflexionssymmetrisch ist: das Wellentyppaar mit den Wellenzahlen $\pm k_z$ hat unterschiedlichen Feldverlauf in den Querschnittsebenen, so daß die Summe von transversalem elektrischen oder magnetischen Feld nie Null wird, und durch dieses Wellentyppaar allein die Randbedingung an Kurzschluß oder Leerlauf nicht erfüllt werden kann. Eine ausführliche Untersuchung der Reflexionseigenschaften [52] führt zu dem Ergebnis, daß der Betrag des Reflexionsfaktors der hier betrachteten Hauptwelle am Leerlauf nahezu 1 ist, während er am Kurzschluß in einigen Frequenzbereichen wesentlich kleiner ist, und daher höhere Wellentypen angeregt werden. Ein weiteres Problem tritt bei der Realisierung des Kurzschlusses auf. Dazu wird der Streifenleiter zweckmäßig bis an die Kante des Substrats geführt, um dort eine Verbindung z. B. aus Leitsilber mit der Grundplatte herzustellen. Die Inhomogenität des entmagnetisierenden Feldes am Rande der Substratplatte führt zu einem inhomogenen inneren Feld im Bereich des Kurzschlusses und damit des Resonators. Daher scheint der kurzgeschlossene Resonator weniger geeignet zu sein.

Als Struktur, die die oben genannten Probleme vermeidet, wurde für dielektrisches Substrat [53], [54] und für die Einzelleitung auf vertikal magnetisiertem Ferritsubstrat [51] die Brauchbarkeit des Ringresonators untersucht. Bei Einhaltung gewisser Bedingungen ist dieser geeignet, zur Messung der Phasenkonstante der geraden Wellenleitung zu dienen. Für gekoppelte Ringresonatoren liegen allerdings andere Verhältnisse vor. Wie sowohl theoretische als auch experimentelle Untersuchungen mit dielektrischem Substrat [53], [54], [55] gezeigt haben, stimmen die Resonanzfrequenzen im wesentlichen mit denen der einzelnen Ringe überein, d. h. die Kopplung wirkt sich nicht auf die Resonanzfrequenzen aus. Gekoppelte Ringresonatoren sind daher als Modell für gekoppelte gerade Leitungen ungeeignet.

Als Schlußfolgerung dieser Überlegungen wird hier der an den

Enden offene Resonator zur Messung herangezogen. Seine Verwendung macht zusätzliche Informationen über den Einfluß des Endeffekts notwendig, da dieser, wie oben dargestellt, in die Auswertung der Meßwerte von k_z eingeht. Für gekoppelte Mikrostreifenleitungen auf dielektrischem Substrat liegen umfangreiche theoretische und experimentelle Ergebnisse für den Endeffekt vor [56]. Aus den Ergebnissen für w/h = 1, die wahrscheinlich auch für entsprechende Leitungsstrukturen auf magnetisiertem Ferritsubstrat gelten, kann festgehalten werden, daß die durch den Endeffekt bewirkte Leitungsverlängerung

- im Vergleich mit der Einzelleitung beim ungeraden Wellentyp kleiner, beim geraden hingegen größer ist,
- mit stärkerer Kopplung beim ungeraden Wellentyp kleiner, beim geraden nur wenig größer wird,
- in Abhängigkeit von der Frequenz beim ungeraden Wellentyp sich nur wenig ändert, beim geraden zunimmt.

Für die Größe des Endeffekts bei der Einzelleitung auf magnetisiertem Ferritsubstrat gibt es in [51] quantitative aus Messungen gewonnene Ergebnisse. Um für die Einzelleitung auch zu einer theoretischen Abschätzung zu gelangen, wurde auf der Basis des stationären Funktionals Gl. (2.24) ein Verfahren hergeleitet, das im Anhang, Abschnitt 8.7 wiedergegeben ist. Die damit erhaltenen Werte liegen etwas niedriger als die in [51] gemessenen. Als Mittelwert aus Messung und Rechnung ergibt sich Δl = 0,8 mm, und dieser Wert wurde zunächst bei der Auswertung der Messungen für den geraden und ungeraden Wellentyp herangezogen. Über die Fehler, die über die ungenaue Kenntnis des Endeffekts hinaus in die Meßgenauigkeit für die Phasenkonstante k_z eingehen, findet sich eine umfangreiche Diskussion in [51] und für gekoppelte Leitungen in [53]. Es läßt sich abschätzen, daß bei den hier gemachten Messungen der Meßfehler ±5% nicht übersteigt.

Die Messungen wurden an Leitungsresonatoren nach Bild 10 durchgeführt. Dabei wird der Resonator als Eintor betrieben, und die Größe des Reflexionsfaktors $|r(f)|$ mit Hilfe einer Reflektometeranordnung gemessen. Die beiden Strukturen in Bild 10a und b

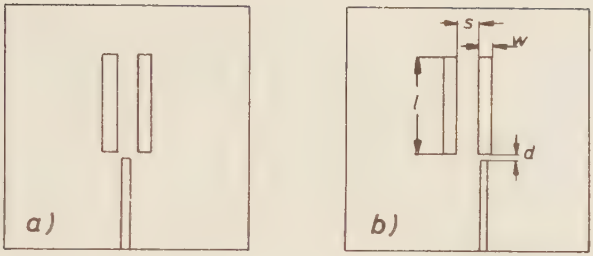


Bild 10. Resonatoren aus gekoppelten Mikrostreifenleitungen mit unterschiedlicher Ankopplung.

unterscheiden sich lediglich durch die Art der Anregung: während durch die symmetrische Anordnung der Einkoppelleitung in a nur der gerade Wellentyp angeregt wird, werden durch die unsymmetrische Anordnung in b sowohl der gerade als auch der ungerade Wellentyp angeregt. Diese unterschiedliche Ankopplung gestattet es, Resonanzfrequenzen des geraden und ungeraden Wellentyps zu unterscheiden. Bild 11 zeigt typische Registrierungen von $|r(f)|$ für die beiden Ankopplungen nach Bild 10a und b an sonst identischen Resonatoren. Die untere Kurve (symmetrische Anregung) weist nur Resonanzen des geraden Wellentyps auf, die obere (unsymmetrische Anregung) zusätzlich die des ungeraden. Erwartungsgemäß ist die Resonanzfrequenz des ungeraden Wellentyps in einem kleinen Frequenzbereich (n = 1) oberhalb der ferrimagnetischen Resonanz (hier bei f_R = 3 GHz) kleiner und damit das zugehörige k_z größer als beim geraden. Von der Ordnung n = 2 an ist die Resonanzfrequenz des ungeraden Wellentyps größer und damit k_{zu} kleiner als beim geraden. Dieses Meßergebnis bestätigt also den Befund der Rechnung, wonach k_{zu} oberhalb f_R zunächst größer als k_{zg} ist (s. Bilder 3 und 9).

Nach dieser Identifikation der Resonanzen des geraden und ungeraden Wellentyps oberhalb der ferrimagnetischen Resonanz

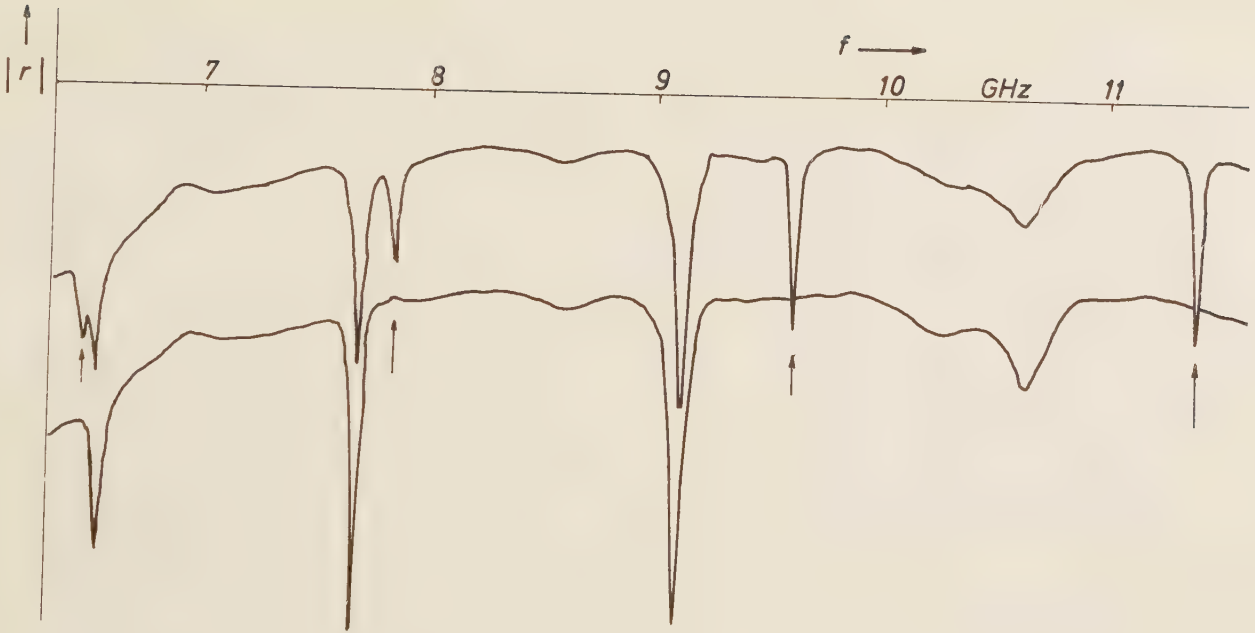


Bild 11. Registrierungen des Reflexionsfaktors für die beiden Resonatoren nach Bild 10a (untere Kurve) und 10b (obere Kurve). Die Resonanzen des ungeraden Wellentyps sind durch ↑ gekennzeichnet.

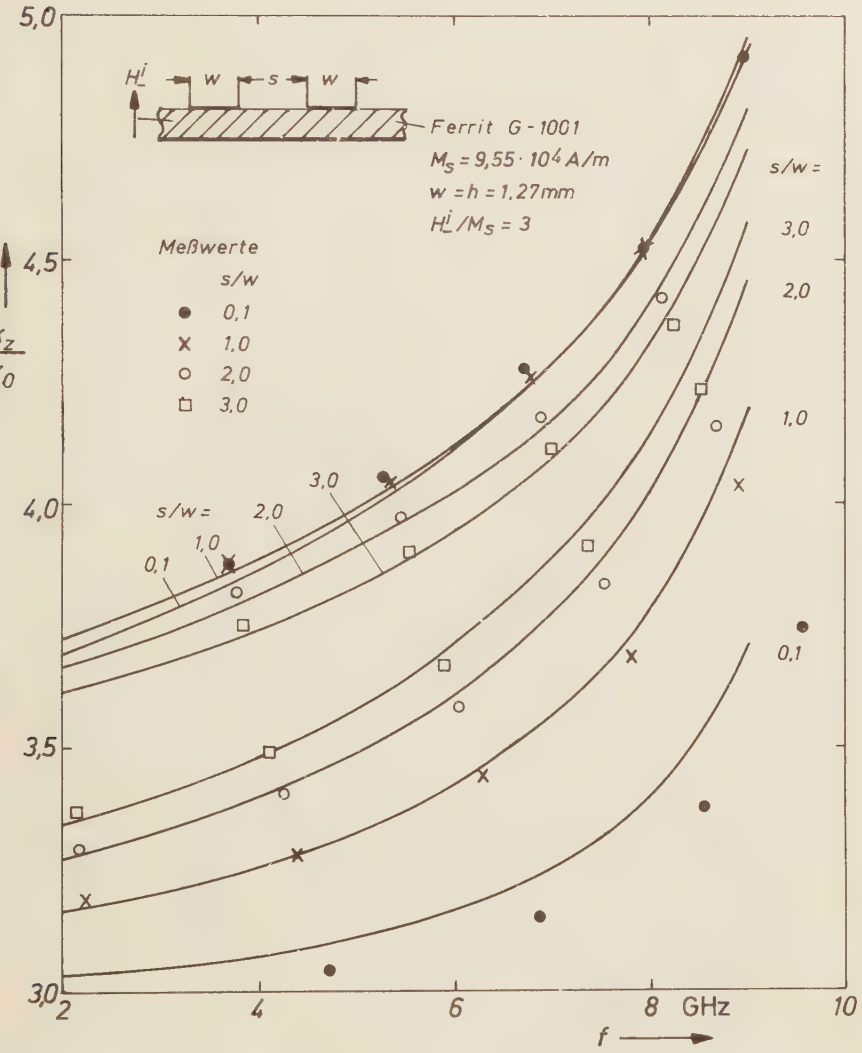


Bild 12. Dispersion zweier gekoppelter Mikrostreifenleitungen. Vergleich von Rechenergebnissen nach der Momentenmethode (Bild 3) mit Meßwerten.

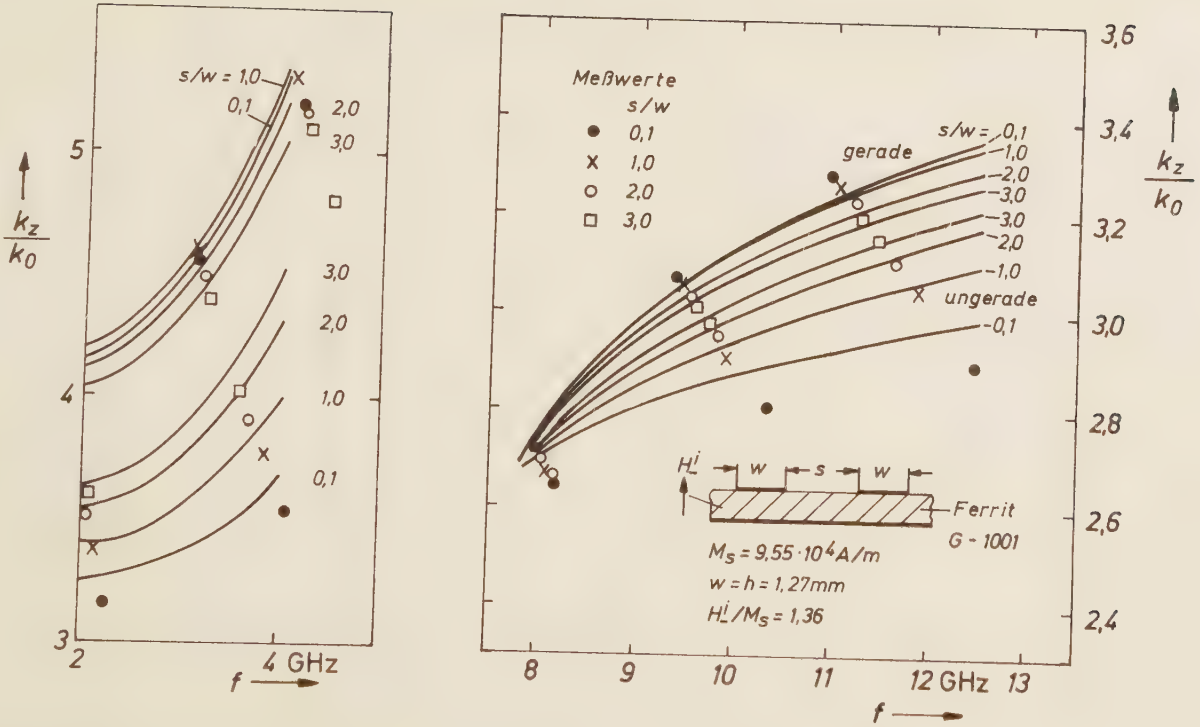


Bild 13. Dispersion zweier gekoppelter Mikrostreifenleitungen. Vergleich von Rechenergebnissen aus dem stationären Ausdruck (Bild 9) mit Meßwerten.

wurden die weiteren Messungen für die beiden Ferrite und für verschiedene Geometrieparameter mit Resonatoren nach Bild 10b durchgeführt. Dabei betrugen die Länge l = 20 mm und der Einkoppelspalt d = 0,2 mm. Das zum Vergleich mit der Rechnung erforderliche innere Feld $\underline{H}^i$ ergibt sich aus dem äußeren statischen Feld $\underline{H}^a$ über

$$\underline{H}^i = \underline{H}^a - N M_s \tag{5.2}$$

mit dem Entmagnetisierungsfaktor N = 1.

In den Bildern 12 und 13 werden die mit der Momentenmethode und aus dem stationären Ausdruck gewonnenen und in den Bildern 3 und 9 dargestellten Dispersionskurven mit Meßergebnissen verglichen. Die Übereinstimmung ist im allgemeinen sehr gut. Abgesehen vom ungeraden Fall mit s/w = 0,1 ergibt sich im Frequenzbereich unterhalb und oberhalb der ferrimagnetischen Resonanz erst bei starker Annäherung an diese eine Differenz von ca. 5%, bedingt durch die dort zunehmenden Verluste im Ferrit. Die für s/w = 0,1, insbesondere im ungeraden Fall vorhandenen Abweichungen können im wesentlichen darauf zurückgeführt werden, daß dem Einfluß des Endeffekts nur ungenügend Rechnung getragen werden konnte. Würden dessen oben beschriebene Auswirkungen berücksichtigt, so nähern sich die Meßpunkte weiter der Rechnung an: im Fall starker Kopplung ist die Leitungsverlängerung durch den Endeffekt beim ungeraden Wellentyp tatsächlich kleiner, als der hier zugrunde gelegte Wert für die Einzelleitung, so daß der ermittelte Meßwert von k_z zu klein ist.

6. Weitere Anwendungsmöglichkeiten des Verfahrens

In diesem Abschnitt sollen noch Hinweise gegeben werden, wie die vorgelegte Analyse ohne viel Mehraufwand auf andere Strukturen angewandt werden kann.

6.1 Zwei unsymmetrische Leitungen

Gl. (3.81) war bereits für zwei unsymmetrische Leitungen hergeleitet worden. Zur numerischen Auswertung sind die Entwicklungsfunktionen beider Leitungen nach Gln. (4.2) und (4.3) zu unterscheiden: $\bar{f}_1$, $\bar{g}_1$ beziehen sich auf den Leiter der Breite $w = w_1$, $\bar{f}_2$, $\bar{g}_2$ auf den der Breite $w = w_2$. Auch hier ist es wieder sinnvoll, die Integrale in gerade und ungerade Anteile zu zerlegen. Die Aufspaltung der Untermatrizen $\mathbf{M}_1$ und $\mathbf{M}_2$ aus Gl. (3.92) entspricht der der Einzelleitung nach Gln. (4.4) und (4.5). Für $\mathbf{M}_{12}$ muß eine Zerlegung entsprechend Abschnitt 8.5 durchgeführt werden. Durch die zusätzliche Berechnung von $\mathbf{M}_2$ ist der numerische Aufwand für die unsymmetrischen Leitungen größer als bei den symmetrischen. Die Gleichung

$$\mathrm{Det}\{\mathbf{M}(k_z)\} = 0 \qquad (4.6)$$

zur Bestimmung der Dispersion ist sowohl für positive als auch für negative k_z auszuwerten, da diese Leitungsstruktur nichtbidirektional ist (s. Abschnitt 3.1).

Ein stationärer Ausdruck mit Vernachlässigung des Querstroms entsprechend Gl. (3.105) kann das nichtbidirektionale Verhalten nicht beschreiben, er ist daher weniger geeignet.

6.2 Mehr als zwei Leitungen

Befinden sich auf dem Ferritsubstrat nun N Streifenleiter der Breiten w_i, so sind im allgemeinen N verschiedene Eigenlösun-

gen mit im allgemeinen N verschiedenen Wellenzahlen zu erwarten.

Ausgangspunkt für die Analyse dieser Struktur bildet wiederum das stationäre Funktional Gl. (3.73). Analog zur Vorgehensweise für zwei Leitungen im Abschnitt 3.3.1 muß für jede der N Leitungen eine Reihenentwicklung für den Strom vorgenommen werden. Mit diesen ergibt sich aus dem stationären Funktional nach Anwendung des Ritz-Verfahrens wieder ein lineares Gleichungssystem, das sich in Matrixschreibweise auf die Form

$$\mathbf{M}\,\check{\mathbf{C}} = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1j} & \cdots & M_{1N} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2j} & \cdots & M_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ M_{j1} & M_{j2} & \cdots & M_{jj} & \cdots & M_{jN} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ M_{N1} & M_{N2} & \cdots & M_{Nj} & \cdots & M_{NN} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \check{C}_1 \\ \check{C}_2 \\ \cdot \\ \check{C}_j \\ \cdot \\ \check{C}_N \end{vmatrix} = 0 \qquad (6.1)$$

bringen läßt. Dabei sind die Untermatrizen M_{ii} identisch mit den Matrizen (3.82) der Einzelleitung der Breite w_i, und die M_{ij} haben die gleiche Struktur, wie die M_{12} aus Gl. (3.94), wenn dort für $j > i$

$\bar{f}_1$, $\bar{g}_1$ ersetzt wird durch $\bar{f}_i$, $\bar{g}_i$,

$\bar{f}_2$, $\bar{g}_2$ " " " $\bar{f}_j$, $\bar{g}_j$,

e^{-j2tp} " " " $e^{-jt_{ij}p}$,

e^{j2tp} " " " $e^{jt_{ij}p}$,

wobei t_{ij} der Abstand zwischen den Mittellinien der Streifen i und j ist. Es besteht der Zusammenhang

$$M_{ji} = M_{ij}^{T}, \qquad (6.2)$$

so daß die Gesamtmatrix M aus Gl. (6.1) symmetrisch ist. Eine unsymmetrische Leitungsstruktur ist wieder nichtbidirektional, und die implizite Bestimmungsgleichung

$$\mathrm{Det}\{\mathbf{M}(k_z)\} = 0 \qquad (4.6)$$

mit M aus Gl. (6.1) muß wiederum für jede der N Eigenlösungen zur Bestimmung der positiven und negativen k_z ausgewertet werden.

7. Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit befaßt sich zunächst allgemein mit der Methodik der Variationsverfahren. Ausgehend vom energetischen Funktional werden die Anwendungsmöglichkeiten von Variationsverfahren auf die Probleme dreidimensionaler Resonatoren und zweidimensionaler Wellenleitungen untersucht und eine Systematik angegeben, die es gestattet, für die verschiedenen Anwendungsfälle stationäre Funktionale zu formulieren. Der Zusammenhang mit dem Reaktionsverfahren und anderen bekannten stationären Ausdrücken wird hergestellt. Dabei zeigt sich die Nützlichkeit der hier entwickelten Vorgehensweise.

Bei der Untersuchung von gekoppelten Mikrostreifenleitungen wird hiervon Gebrauch gemacht. Zur Entwicklung eines Lösungsverfahrens für den Strom auf den Streifenleitern wird das Feldproblem mit Hilfe der Fouriertransformation im Ortsfrequenzbereich bearbeitet. Dabei werden zunächst allgemeine Eigenschaften des benötigten Greenschen Tensors angegeben, sodann der Greensche Tensor für das Problem hergeleitet. Mit Hilfe eines stationären Funktionals und des Ritz-Verfahrens wird schließlich ein lineares Gleichungssystem aufgestellt, das die Berechnung der Dispersion und der Stromverteilung auf den Streifenleitern gestattet. Es zeigt sich, daß diese Vorgehensweise der in der Literatur üblichen direkten Anwendung einer Momentenmethode bei symmetrischen Strukturen äquivalent ist, während bei unsymmetrischen Strukturen Unterschiede in beiden Verfahren auftreten. Aus dem stationären Funktional werden weiterhin einige spezielle stationäre Formeln zur Bestimmung der Dispersion sowohl der Einzelleitung als auch von zwei gekoppelten Leitungen hergeleitet.

Bei der numerischen Auswertung der beiden hier benutzten Verfahren der stationären Ausdrücke und der Momentenmethode zeigt sich, daß bei der Einzelleitung für die Momentenmethode kürzere Rechenzeit benötigt wird als bei einem bisher veröffentlichten

Verfahren. Die noch wesentlich schnelleren stationären Ausdrücke liefern Ergebnisse, die sehr gut mit denen der Momentenmethode übereinstimmen. Für zwei gekoppelte Leitungen gleicher Breite werden nach beiden Verfahren berechnete Dispersionskurven für verschiedene Geometrie- und Materialparameter wiedergegeben. Auch hier ergibt sich, bis auf den Fall sehr starker Kopplung, wieder eine gute Übereinstimmung zwischen stationärem Ausdruck und Momentenmethode. Den Rechnungen wurden einige Messungen gegenübergestellt, die sich gut in den Verlauf der theoretischen Kurven einpassen.

Abschließend werden die Möglichkeit zur Anwendung der Momentenmethode auf zwei unsymmetrische Leitungen und auf mehr als zwei Leitungen erörtert sowie ein stationärer Ausdruck zur numerischen Abschätzung des Endeffekts angegeben und ausgewertet.

Die Ergebnisse dieser Arbeit haben praktische Bedeutung beim Entwurf und der Dimensionierung von Bauelementen in Mikrostreifenleitungstechnik auf Ferritsubstrat. Dabei erweist sich das Verfahren der stationären Ausdrücke zur Berechnung der Phasenkonstanten sowohl von Einzelleitung als auch von gekoppelten Leitungen gegenüber der Momentenmethode aufgrund seiner schnellen numerischen Auswertbarkeit als besonders vorteilhaft, wenn der Einfluß von Frequenz und Leitungsparametern untersucht werden soll. Die hier dargestellten Ergebnisse für gekoppelte Leitungen können als Grundlage für die Beurteilung des Verhaltens endlich langer gekoppelter Leitungsstücke dienen, z. B. beim Entwurf von Richtkopplern oder umgekehrt zur Vermeidung der Kopplung parallel geführter Leitungen. Bekanntlich wird für einen guten Richtkoppler die Gleichheit der Phasenkonstanten von geradem und ungeradem Wellentyp angestrebt, und die Stromverteilung auf den Leitern bestimmt den Kopplungsgrad. Unterhalb der ferrimagnetischen Resonanz ergeben sich große Unterschiede in den Phasenkonstanten des geraden und ungeraden Wellentyps, während die Stromverteilung auf den Streifenleitern nur wenig verschieden von der der Einzelleitung ist. Oberhalb

der ferrimagnetischen Resonanz ist die Aufspaltung der Dispersionskurven für geraden und ungeraden Fall weniger stark, die Stromverteilung auf den Streifenleitern wird jedoch stärker durch die Kopplung beeinflußt. Daher wird man bei einem Richtkoppler vorzugsweise oberhalb der ferrimagnetischen Resonanz arbeiten, was zudem den Vorteil des kleineren statischen Magnetfeldes hat.

Schließlich können die hier mit dem Variationsverfahren gewonnenen Erfahrungen zur rationellen Berechnung weiterer Leitungsstrukturen auf magnetisiertem Ferritsubstrat, wie z. B. der mäanderförmig geführten Mikrostreifenleitung oder auch der Koplanarleitung herangezogen werden.

8. Anhang

8.1 Stationäres Verhalten des Funktionals (2.19) 87

8.2 Stationäres Verhalten von Gl. (2.27) 88

8.3 Stationäre Ausdrücke für Wellenleitungen aus Reaktionen 88

8.4 Die Elemente des Greenschen Tensors für die Grenzschicht x = h 91

8.5 Zerlegung der Untermatrix M_{12} 93

8.6 Probefunktionen und ihre Fourier-transformierten 94

8.7 Abschätzung des Endeffekts 95

8. Anhang

8.1 Stationäres Verhalten des Funktionals (2.19)

Das Funktional

$$I(r,s) = \langle Br,s\rangle - \langle r,g\rangle - \langle f,s\rangle, \quad r \text{ aus } D(B), \ s \text{ aus } D(B^a) \qquad (8.1)$$

ist stationär bei $r = u$ und $s = v$, wenn u Lösung der Gleichung $Bu = f$ und v Lösung der adjungierten Gleichung $B^a v = g$ ist. Zur Bildung der ersten Variation werden $r = u + \varepsilon u_\varepsilon$ und $s = v + \kappa v_\kappa$, ε, κ reell, u_ε aus $D(B)$, v_κ aus $D(B^a)$ gesetzt und für beide inneren Produkte die Ausdrücke

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon} I(u+\varepsilon u_\varepsilon, v)\Big|_0 = \langle Bu_\varepsilon, v\rangle - \langle u_\varepsilon, g\rangle \qquad (8.2)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial\kappa} I(u, v+\kappa v_\kappa)\Big|_0 = \langle Bu, v_\kappa\rangle - \langle f, v_\kappa\rangle \qquad (8.3)$$

gebildet. Wird in Gl. (8.2) der adjungierte Operator genommen

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon} I\Big|_0 = \langle u_\varepsilon, B^a v\rangle - \langle u_\varepsilon, g\rangle \quad , \qquad (8.4)$$

so verschwinden die Randterme aus der partiellen Integration, wenn u_ε aus $D(B)$ und v aus $D(B^a)$ sind. Aus Gl. (8.4) folgt dann

$$\langle u_\varepsilon, B^a v - g\rangle = 0 \qquad (8.5)$$

für alle u_ε aus $D(B)$, wenn $B^a v - g = 0$ gilt, also v Lösung der adjungierten Gleichung ist. Aus Gl. (8.3) folgt

$$\langle Bu - f, v_\kappa\rangle = 0 \ , \qquad (8.6)$$

wenn $Bu - f = 0$ für beliebige Funktionen v_κ. Während also die

Probefunktionen r aus dem Definitionsbereich des Operators B genommen werden müssen, brauchen die Probefunktionen s keinen Randbedingungen zu genügen.

8.2 Stationäres Verhalten von Gl. (2.27)

Führt man in das Funktional (2.12) Gl. (2.13) ein, dann läßt sich die stationäre Formel (2.26) auf die Form

$$I(\varepsilon) = \omega A(\varepsilon) + B(\varepsilon) \tag{8.7}$$

bringen. Wegen des stationären Verhaltens von Gl. (8.7) gilt

$$\frac{d}{d\varepsilon} I(v)\Big|_o = \omega A'(0) + B'(0) = 0 \ . \tag{8.8}$$

Damit Gl. (2.27) eine stationäre Formel für die Resonanzfrequenz bezüglich kleiner Änderungen der Probefunktionen ist, muß

$$\frac{d}{d\varepsilon}\omega\Big|_o = - \frac{d}{d\varepsilon} \frac{B(\varepsilon)}{A(\varepsilon)}\Big|_o = \frac{B(0)\, A'(0) - B'(0)\, A(0)}{A^2(0)} = 0 \tag{8.9}$$

gelten. Da im stationären Punkt wegen $I(\varepsilon = 0) = 0$ auch $B(0) = - \omega A(0)$ gilt, läßt sich diese Gleichung mit Gl. (8.8) umformen in:

$$\frac{d\omega}{d\varepsilon}\Big|_o = \frac{-1}{A(0)}[A'(0) + B'(0)] = \frac{-1}{A(0)} \frac{dI}{d\varepsilon}\Big|_o = 0 \ . \tag{8.10}$$

Damit ist gezeigt, daß aus dem stationären Verhalten von Gl. (2.26) das stationäre Verhalten der Gl. (2.27) folgt.

8.3 Stationäre Ausdrücke für Wellenleitungen aus Reaktionen

Im Abschnitt 2 war gezeigt worden, daß die Reaktion Gl. (2.43) für Wellenleitungen kein stationärer Ausdruck ist. Für die häufig benutzte Näherung, daß nur eine einzige Komponente von

Feld und Quelle mitgenommen wird, z. B. die z-Komponenten bei einer in z-Richtung homogenen Wellenleitung, wird dies jedoch nicht bemerkbar, da die richtige Reaktion Gl. (2.54) dann auf denselben Ausdruck führt wie Gl. (2.42), der auch in den Arbeiten [19] - [21] benutzt wurde.

Als spezielles Beispiel soll noch gezeigt werden, daß die aus Gl. (2.44) gewonnene [22] und gelegentlich benutzte [21] Formel für die Wellenzahl einer Wellenleitung

$$-k_z^2 = \frac{\int \left[\frac{1}{\mu}(\nabla_t \times \vec{E}_p)^2 - \omega^2 \varepsilon \vec{E}_p^2\right] dA}{\int \frac{1}{\mu}(\vec{u}_z \times \vec{E}_p)^2 dA} \tag{8.11}$$

zwar stationär ist, das stationäre Verhalten aber nicht zur Lösung der Maxwellschen Gleichungen gehört. Um die erste Variation von Gl. (8.11) zu bilden, wird der Ansatz

$$\vec{E}_p \quad \vec{E} + p\,\vec{e}$$

mit einem skalaren Parameter p und einem beliebigen Feld $\vec{e}$, das die Randbedingungen des Problems erfüllt, gemacht. Damit ergibt sich aus Gl. (8.11) das Funktional

$$I(p) = -k_z^2 \int \frac{1}{\mu}\{\vec{u}_z \times (\vec{E}+p\vec{e})\}^2 dA + \omega^2 \int \varepsilon (\vec{E}+p\vec{e})^2 dA - \\ - \int \frac{1}{\mu}\{\nabla_t \times (\vec{E}+p\vec{e})\}^2 \quad dA = 0. \tag{8.12}$$

Für stationäres Verhalten muß gefordert werden, daß die Ableitung bezüglich p an der Stelle p = 0 verschwindet:

$$\left.\frac{dI}{dp}\right|_0 = -k_z^2\, 2 \int \frac{1}{\mu}(\vec{u}_z \times \vec{E})(\vec{u}_z \times \vec{e})\, dA + \omega^2 2 \int \varepsilon \vec{E}\vec{e}\, dA - \\ - 2\int \frac{1}{\mu} \nabla_t \times \vec{E} \cdot \nabla_t \times \vec{e} \quad dA = 0 \,. \tag{8.13}$$

Mit den Umformungen

$$(\vec{u}_z \times \vec{E})(\vec{u}_z \times \vec{e}) = - \vec{e}\{\vec{u}_z \times (\vec{u}_z \times \vec{E})\} \tag{8.14}$$

und

$$\int \frac{1}{\mu} \nabla_t \times \vec{E} \cdot \nabla_t \times \vec{e}\, dA = \int \vec{e}\, \nabla_t \times \frac{1}{\mu} \nabla_t \times \vec{E}\, dA + \oint \frac{1}{\mu} \nabla_t \times \vec{E} (\vec{n} \times \vec{e})\, dl \tag{8.15}$$

wobei das Linienintegral auf der rechten Seite von Gl. (8.15) aufgrund der Randbedingungen verschwindet*), wird aus Gl. (8.13)

$$\left.\frac{1}{2}\frac{dI}{dp}\right|_0 = k_z^2 \int \frac{1}{\mu} \vec{e}\{\vec{u}_z \times (\vec{u}_z \times \vec{E})\}\, dA + \omega^2 \int \vec{e} \varepsilon \vec{E}\, dA - \int \vec{e} \nabla_t \times \frac{1}{\mu} \nabla_t \times \vec{E}\, dA =$$

$$= \int \vec{e}\{ k_z^2 \frac{1}{\mu} \vec{u}_z \times (\vec{u}_z \times \vec{E}) + \omega^2 \varepsilon \vec{E} - \nabla_t \times \frac{1}{\mu} \nabla_t \times \vec{E}\}\, dA \quad . \tag{8.16}$$

Da dieser Ausdruck für alle $\vec{e}$ Null werden soll, muß der Ausdruck in der geschweiften Klammer verschwinden. Das $\vec{E}$-Feld muß also der Differentalgleichung

$$\nabla_t \times \frac{1}{\mu} \nabla_t \times \vec{E} - k_z^2 \frac{1}{\mu} \vec{u}_z \times (\vec{u}_z \times \vec{E}) - \omega^2 \varepsilon \vec{E} = 0 \tag{8.17}$$

genügen. Diese ist im allgemeinen nicht identisch mit der aus den Maxwellschen Gleichungen für die quellenfreie Wellenleitung mit isotropem Dielektrikum folgende Wellengleichung

$$\nabla_t \times \frac{1}{\mu} \nabla_t \times \vec{E} - jk_z \left(\frac{1}{\mu} \vec{u}_z \times \nabla_t \times \vec{E} + \nabla_t \times \frac{1}{\mu} \vec{u}_z \times \vec{E}\right) -$$

$$- k_z^2 \frac{1}{\mu} \vec{u}_z \times (\vec{u}_z \times \vec{E}) - \omega^2 \varepsilon \vec{E} = 0 \quad . \tag{8.18}$$

Der Ausdruck (8.11) ist daher stationär bei der Lösung der Differentialgleichung (8.17), im allgemeinen aber nicht bei der Lösung der Maxwellschen Gleichungen.

---

*) $\vec{n}$ ist der Normaleneinheitsvektor auf der Berandung.

8.4 Die Elemente des Greenschen Tensors für die Grenzschicht x = h

Die T_{ij} aus Gl. (3.66) ergeben sich zu

$$T_{11} = (d_{12}Q_3 - d_{11}Q_2)/T_1 ,$$

$$T_{12} = -(Q_2 + d_{12}Q_1)/T_1 ,$$

$$T_{21} = (Q_6 - d_{11}Q_3 + d_{12}Q_2)/T_1 ,$$

$$T_{22} = (Q_4 + d_{11}Q_1)/T_1 ,$$

$$T_{31} = \{(d_{11}^2 - d_{11}L_3 - d_{12}^2)\sinh(s_3h) + d_{12}M_3\cosh(s_3h)\}/T_2, \tag{8.19}$$

$$T_{32} = \{(d_{11} - L_3)\sinh(s_3h) + d_{12}B_3\cosh(s_3h)\}/T_2,$$

$$T_{41} = -\{(d_{11}^2 - d_{11}L_1 - d_{12}^2)\sinh(s_1h) + d_{12}M_1\cosh(s_1h)\}/T_2,$$

$$T_{42} = \{(L_1 - d_{11})\sinh(s_1h) - d_{12}B_1\cosh(s_1h)\}/T_2,$$

mit

$$T_1 = Q_1(d_{11}^2 - d_{12}^2) - d_{12}(Q_2 + Q_5) + d_{11}(Q_3 + Q_4) - Q_6 ,$$

$$T_2 = T_1\cosh\{h(s_1 + s_3)\}/2 \tag{8.20}$$

und

$$Q_1 = \sinh\{h(s_1 + s_3)\}(B_1 - B_3) - \sinh\{h(s_1 - s_3)\}(B_1 + B_3),$$

$$Q_2 = (L_3 - L_1)[\cosh\{h(s_1 + s_3)\} - \cosh\{h(s_1 - s_3)\}] ,$$

$$Q_3 = \sinh\{h(s_1 + s_3)\}(M_3 - M_1) + \sinh\{h(s_1 - s_3)\}(M_1 + M_3) ,$$

$$Q_4 = \sinh\{h(s_1 + s_3)\}(B_3L_1 - B_1L_3) + \tag{8.21}$$

$$+ \sinh\{h(s_1 - s_3)\}(B_3L_1 + B_1L_3),$$

$$Q_5 = (B_3M_1 - B_1M_3)[\cosh\{h(s_1 + s_3)\} + \cosh\{h(s_1 - s_3)\}] ,$$

$$Q_6 = \sinh\{h(s_1 + s_3)\}(L_1M_3 - L_3M_1) + \tag{8.21}$$

$$+ \sinh\{h(s_1 - s_3)\}(L_1M_3 + M_1L_3) .$$

Für x = h liefern Gln. (3.59) und (3.61) zusammen mit Gln. (3.66) für die Feldkomponenten $\bar{E}_y$ und $\bar{E}_z$

$$\bar{E}_z = T_{11}\bar{K}_y + T_{12}\bar{K}_z$$

$$\bar{E}_y = d_{11}(T_{11}\bar{K}_y + T_{12}\bar{K}_z) + d_{12}(T_{21}\bar{K}_y + T_{22}\bar{K}_z) = \tag{8.22}$$

$$= (d_{11}T_{11} + d_{12}T_{21})\bar{K}_y + (d_{11}T_{12} + d_{12}T_{22})\bar{K}_z .$$

Durch Vergleich mit Gl. (3.67) ergeben sich aus dieser Gleichung die Elemente des Greenschen Tensors für x = h zu

$$G_{yy} = \{(d_{12}^2 - d_{11}^2)Q_2 + d_{12}Q_6\}/T_1 ,$$

$$G_{zy} = G_{yz}^{*} = T_{11} \quad , \quad G_{zz} = T_{12} . \tag{8.23}$$

Mit den T_{ij} und Gl. (3.66) können die Tensorelemente für den Raumbereich $x \geq h$ aus Gln. (3.59) und (3.61), die für den Raumbereich $x \leq h$ aus Gln. (3.55) gewonnen werden.

8.5 Zerlegung der Untermatrix M_{12}

Nach der Zerlegung des Integranden in den geraden und ungeraden Anteil folgen für die Matrixelemete der Untermatrix M_{12} aus Gl. (3.94) mit der Fallunterscheidung 1) m, n gerade; 2) m, n ungerade; 3) m gerade, n ungerade; 4) m ungerade, n gerade:

$$
\begin{aligned}
M^{12}_{yymn} &= 1) \int_0^\infty G_{yy}\bar{f}_m\bar{f}_n \cos 2tp \, dp \,, \\
&\quad 2) \text{ wie } 1), \\
&\quad 3) -\int_0^\infty G_{yy}\bar{f}_m\bar{f}_n \sin 2tp \, dp \,, \\
&\quad 4) \int_0^\infty G_{yy}\bar{f}_m\bar{f}_n \sin 2tp \, dp \,,
\end{aligned}
\tag{8.24}
$$

$$
\begin{aligned}
M^{12}_{zzmn} &= 1) \int_0^\infty G_{zz}\bar{g}_m\bar{g}_n \cos 2tp \, dp \,, \\
&\quad 2) \text{ wie } 1) \\
&\quad 3) \int_0^\infty G_{zz}\bar{g}_m\bar{g}_n \sin 2tp \, dp \,, \\
&\quad 4) -\int_0^\infty G_{zz}\bar{g}_m\bar{g}_n \sin 2tp \, dp \,,
\end{aligned}
\tag{8.25}
$$

$$
\begin{aligned}
M^{12}_{yzmn} &= 1) \int_0^\infty (-\mathrm{Re}\{G_{zy}\}\bar{f}_m\bar{g}_n \cos 2tp + \mathrm{Im}\{G_{zy}\}\bar{f}_m\bar{g}_n \sin 2tp) dp \,, \\
&\quad 2) \int_0^\infty (\mathrm{Re}\{G_{zy}\}\bar{f}_m\bar{g}_n \cos 2tp - \mathrm{Im}\{G_{zy}\}\bar{f}_m\bar{g}_n \sin 2tp) dp \,, \\
&\quad 3) \int_0^\infty (-\mathrm{Re}\{G_{zy}\}\bar{f}_m\bar{g}_n \sin 2tp - \mathrm{Im}\{G_{zy}\}\bar{f}_m\bar{g}_n \cos 2tp) dp \,, \\
&\quad 4) \text{ wie } 3) \,,
\end{aligned}
\tag{8.26}
$$

$$M^{12}_{zymn} = 1) \int_0^\infty (-\mathrm{Re}\{G_{zy}\}\bar{g}_m\bar{f}_n \cos 2tp - \mathrm{Im}\{G_{zy}\}\bar{g}_m\bar{f}_n \sin 2tp)\,dp \ ,$$

$$2) \int_0^\infty (\mathrm{Re}\{G_{zy}\}\bar{g}_m\bar{f}_n \cos 2tp + \mathrm{Im}\{G_{zy}\}\bar{g}_m\bar{f}_n \sin 2tp)\,dp \ , \qquad (8.27)$$

$$3) \int_0^\infty (\mathrm{Re}\{G_{zy}\}\bar{g}_m\bar{f}_n \sin 2tp - \mathrm{Im}\{G_{zy}\}\bar{g}_m\bar{f}_n \cos 2tp)\,dp \ ,$$

4) wie 3) .

Dabei sind die $\bar{g}_m$ und die $\bar{f}_m$ die in den Gln. (4.2) und (4.3) definierten Größen.

8.6 Probefunktionen und ihre Fouriertransformierten

Die Funktionen aus Bild 6 und ihre Fouriertransformierten lauten:

Zu Bild 6a:

$$K_{zg1}(y) = \begin{cases} 0 & |y| > \frac{w}{2} \\ 1 + \frac{A}{C}\left(-\frac{y}{w} - \frac{1}{2} + C\right) & -\frac{w}{2} \le y \le -\frac{w}{2} + Cw \\ 1 & -\frac{w}{2} + Cw \le y \le \frac{w}{2} - Cw \\ 1 + \frac{A}{C}\left(\frac{y}{w} - \frac{1}{2} + C\right) & \frac{w}{2} - Cw \le y \le \frac{w}{2} \end{cases} \qquad (8.28)$$

$$\bar{K}_{zg1}(p) = (1 + A)\frac{2}{p}\sin\left(\frac{w}{2}p\right) - \frac{4A}{Cw}\frac{1}{p^2}\sin\left(\frac{Cw}{2}p\right)\sin\frac{w}{2}(1-C)p \qquad (8.29)$$

Zu Bild 6b:

$$K_{zg2}(y) = \begin{cases} 0 & |y| > \frac{w}{2} \\ 1 + 1/\sqrt{1 - \left(\frac{2y}{w}\right)^2} & |y| \le \frac{w}{2} \end{cases} \qquad (8.30)$$

$$\bar{K}_{zg2}(p) = \frac{2}{p}\sin(\tfrac{W}{2}p) + \tfrac{W}{2} J_o(\tfrac{W}{2}p) \qquad (8.31)$$

Zu Bild 6c:

$$K_{zu}(y) = \begin{cases} 0 & |y| > \frac{W}{2} \\ \frac{2B}{W}y & |y| \leq \frac{W}{2} \end{cases} \qquad (8.32)$$

$$\bar{K}_{zu}(p) = j2B \frac{1}{p}\cos(\tfrac{W}{2}p) - \frac{2}{wp}\sin(\tfrac{W}{2}p) \qquad (8.33)$$

8.7 Abschätzung des Endeffekts

Ein an beiden Enden offenes homogenes Leitungsstück der Länge $\bar{l} = (n\lambda_g)/2$ ist unter der Voraussetzung eines idealen Leerlaufs ein $n\lambda_g/2$-Resonator. Damit ein realer offener Resonator die gleiche Resonanzfrequenz hat, muß er die elektrische Länge $\bar{l}$ und damit eine geringere mechanische Länge l haben, da sich der sog. Endeffekt in einer Leitungsverlängerung auswirkt. Zur Berechnung der Differenz $\bar{l} - l = \Delta l$ wird der prinzipiell gleiche Weg eingeschlagen, wie in [57] zur Berechnung des Endeffekts bei isotropem Substrat.

Dazu muß zum einen die Resonanzfrequenz des offenen Resonators der Länge l berechnet werden. Zum anderen können mit dem Berechnungsverfahren für die unendlich ausgedehnte Leitung zu dieser Frequenz die Wellenzahl und aus der Leitungswellenlänge die Länge $\bar{l}$ des Resonators mit idealem Leerlauf bestimmt werden. Daraus ergibt sich die durch den Endeffekt bewirkte Leitungsverlängerung zu

$$\Delta l = \frac{n\lambda_g}{2} - l = \frac{nc}{2f_R(k_z/k_o)} - l \; . \qquad (8.34)$$

Die Leitungswellenlänge λ_g für die unendlich ausgedehnte Leitung kann mit dem stationären Ausdruck Gl. (3.103) zu jeder Frequenz f angegeben werden. Zur Bestimmung der Resonanzfrequenz des offenen Resonators der Länge l soll ebenfalls ein stationärer Ausdruck hergeleitet werden.

Auch bei verlustlosem Material ist der offene Resonator durch Abstrahlung bedämpft, was zu einer komplexen Resonanzfrequenz f_R führt. Da hier eine Näherung für f_R ermittelt werden soll, werden die Abstrahlungsverluste vernachlässigt, so daß dann f_R reell ist. Aus dem stationären Funktional (2.24) kann für den selbstadjungierten Fall bei hermiteschem inneren Produkt die stationäre Formel

$$\int \vec{E} \, \vec{J}^* \, dv = 0 \tag{8.35}$$

gewonnen werden, wobei über das Volumen des Resonators zu integrieren ist. Um das Feldproblem des Resonators zu beschreiben, müssen die Maxwellschen Gleichungen (3.35) zusätzlich zur Fouriertransformation bezüglich y noch einer solchen bezüglich z unterzogen werden, da der Resonator in z-Richtung begrenzt ist. Der Differentialoperator

$$\frac{\partial}{\partial z} = jk_z = jk_o b \tag{8.36}$$

läßt im Vergleich mit Gl. (3.39) erkennen, daß die Lösung des Feldproblems der unendlich ausgedehnten Leitung übernommen werden kann, wenn darin b durch (-b) ersetzt wird. Dies gilt insbesondere für den Greenschen Tensor aus Abschnitt 8.4.

Da der Strom auf die Ebene x = h beschränkt ist, braucht die Integration in Gl. (8.35) nur über y und z ausgeführt zu werden. Mit Hilfe des Parseval-Theorems läßt sich Gl. (8.35) dann für die transformierten Größen formulieren

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int \vec{\tilde{E}}(p,b)\vec{\tilde{J}}^*(p,b) \, dpdb = 0 \, . \tag{8.38}$$

Werden der Zusammenhang zwischen $\vec{E}$ und $\vec{J}$ durch den Greenschen Tensor eingeführt und der Querstrom vernachläßigt, so ergibt sich schließlich als stationäre Formel für die Resonanzfrequenz

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int G_{zz}(p,b)|\bar{J}_z(p,b)|^2 \, dpdb = 0 \, . \tag{8.39}$$

Zur Auswertung ist eine zweidimensionale Integration numerisch durchzuführen. Dabei treten Bereiche auf, in denen der in Gl. (3.59) definierte, den exponentiellen Verlauf des Feldes im Vakuum beschreibende Term α_x und damit auch G_{zz} aufgrund der Abstrahlung komplex werden. Der Imaginärteil des Integrals in Gl. (8.39) ist nach numerischen Untersuchungen[58] um zwei Zehnerpotenzen kleiner als der Realteil, und wird entsprechend der oben gemachten Voraussetzung der Vernachlässigung von Abstrahlungsverlusten vernachlässigt.

Als Probestromverteilung wird wie in [57] ein Produktansatz

$$J_z(y,z) = J_z(y)J_z(z) \tag{8.40}$$

gewählt, wobei für $J_z(y)$ die Funktion in Bild 6b und für $J_z(z)$ entsprechend dem $\lambda_g/2$- oder λ_g-Resonator die Funktionen

$$\begin{aligned} J_1(z) &= \cos(\tfrac{\pi}{l}z) \\ J_2(z) &= \sin(\tfrac{2\pi}{l}z) \end{aligned} \qquad -\tfrac{l}{2} \leq z \leq \tfrac{l}{2} \tag{8.41}$$

mit ihren Fouriertransformierten

$$\begin{aligned} \bar{J}_1(b) &= \frac{-(\pi l/2)\cos(bl/2)}{(bl/2)^2 - (\pi/2)^2} \\ \bar{J}_2(b) &= \frac{\pi l \sin(bl/2)}{(bl/2)^2 - \pi^2} \end{aligned} \tag{8.42}$$

benutzt werden.

Mit Gl. (3.30) wurde festgestellt, daß G_{zz} eine in p gerade Funktion ist. Eine genauere Untersuchung zeigt, daß G_{zz} auch eine gerade Funktion in b ist. Obwohl die zweidimensionale Integration in Gl. (8.39) nur von den unteren Grenzen Null an ausgeführt zu werden braucht, ist sie immer noch sehr rechenzeitaufwendig. Daher wurden nur einige Werte der endeffektbedingten Leitungsverlängerung berechnet. Für eine Leitung mit w = h = 1,27mm auf dem Material TT1-105 ergeben sich über die Resonanzfrequenzen aus Gl. (8.39) und nach Gl. (8.43) im Frequenzbereich von 2 bis 7 GHz bei kleinem inneren Feld (H_-^i/M_s = 0,03) Werte $\Delta l \leq 0{,}8$mm, bei großem inneren Feld (H_-^i/M_s = 3) Werte im Bereich $0{,}5 \leq \Delta l \leq 0{,}7$mm. Für das Material G-1001 liegen die Werte aufgrund des höheren ε_r erwartungsgemäß niedriger. Verglichen mit den Messungen an TT1-105 [51], die in diesem Frequenzbereich Werte von 0,8 bis 0,9mm ergaben, ist die Übereinstimmung zufriedenstellend.

9. Literaturverzeichnis

[1] Stakgold, I.,
Boundary value problems of mathematical physics, vol. II
Macmillan, New York 1968

[2] Velte, W.,
Direkte Methoden der Variationsrechnung
Teubner, Stuttgart 1976

[3] Finlayson, B. A.,
Methods of weighted residuals and variational principles
with application in fluid mechanics, heat and mass transfer
Academic Press, New York 1972

[4] Michlin, S. G.,
Variationsmethoden der mathematischen Physik
Akademie-Verlag, Berlin 1962

[5] Jeng, G., Wexler, A.,
Self-adjoint variational formulation of problems
having non-self-adjoint operators
IEEE Trans. MTT 26 (1978), S. 91-94

[6] McDonald, B. H., Friedman, M., Wexler, A.,
Variational solution of integral equations
IEEE Trans. MTT 22 (1974), S. 237-248

[7] Konrad, A.,
Vector variational formulation of electromagnetic
fields in anisotropic media
IEEE Trans. MTT 24 (1976), S. 553-559

[8] McAulay, A. D.,
Variational finite-element solution for dissipative
waveguides and transportation application
IEEE Trans. MTT 25 (1977), S. 382-392

[9] Mohsen, A.,
Variational formulation of electromagnetic problems in lossy anisotropic inhomogeneous media
AEÜ 32 (1978), S. 473-476

[10] Chen, C. H., Lien, C. D.,
The variational principle for non-self-adjoint electromagnetic problems
IEEE Trans. MTT 28 (1980), S. 878-886

[11] Rumsey, V. H.,
Reaction concept in electromagnetic theory
Phys. Rev. 94 (1954), S. 1483-1491

[12] Rumsey, V. H.,
Erratum
Phys. Rev. 95 (1954), S. 1705

[13] Bresler, A. D., Joshi, G. H., Marcuvitz, N.,
Orthogonality properties for modes in passive and active uniform wave guides
J. Appl. Phys. 29 (1958), S. 794-799

[14] Friedman, B.,
Principles and techniques of applied mathematics
Wiley, London 1966

[15] Berk, A. D.,
Variational principles for electromagnetic resonators and waveguides
IRE Trans. AP 4 (1956), S. 104-111

[16] Harrington, R. F.,
Time-harmonic electromagnetic fields
McGraw-Hill, New York 1961

[17] Morse, P. M., Feshbach, H.,
Methods of theoretical physics II
McGraw-Hill, New York 1953

[18] Gardiol, F. E., Vander Vorst, A. S.,
Computer analysis of E-plane resonance isolators
IEEE Trans. MTT 19 (1971), S. 315-322

[19] Pregla, R.,
A method for the analysis of coupled rectangular dielectric waveguides
AEÜ 28 (1974), S. 349-357

[20] Pregla, R., Pintzos, S. G.,
Determination of the propagation constant in coupled microslots by a variational method
5th Coll. Microw. Comm., Budapest 1974, S. MT491-MT500

[21] Kowalski, G., Pregla, R.,
Dispersion characteristics of single and coupled microstrips
AEÜ 26 (1972), S. 276-280

[22] Unger, H.-G.,
Elektromagnetische Wellen II
Vieweg, Braunschweig 1967

[23] Harrington, R. F.,
Field computation by moment method
Macmillan, New York 1968

[24] Collin, R. E.,
Field theory of guided waves
McGraw-Hill, New York 1960

[25] Helszajn, J.,
Principles of microwave ferrite engineering
Wiley, London 1969

[26] Schneider, M. V.,
Microstrip lines for microwave integrated circuits
BSTJ 48 (1969), S. 1421-1444

[27] Kompa, G.,
Planar waveguide model for calculating
microstrip components
Electron. Lett. 11 (1975), S. 459-460

[28] Denlinger, E. J.,
A frequency dependent solution for microstrip
transmission lines
IEEE Trans. MTT 19 (1971), S. 30-39

[29] Itoh, T., Mittra, R.,
Spectral-domain approach for calculating the
dispersion characteristics of microstrip lines
IEEE Trans. MTT 21 (1973), S. 496-499

[30] Jansen, R.,
A moment method for covered microstrip dispersion
AEÜ 29 (1975), S. 17-20

[31] Hines, M. E.,
Reciprocal and nonreciprocal modes of propagation in
ferrite stripline and microstrip devices
IEEE Trans. MTT 19 (1971), S. 442-451

[32] Hofmann, H.,
Zur Dispersion des Phasenkoeffizienten von
Streifenleitungen auf Ferritsubstrat
Dissertation, Aachen 1975

[33] Borburgh, J.,
Theoretische Untersuchung der Dispersion und Feldver-
teilung von Wellentypen einer Mikrostreifenleitung
mit gyrotropem Substrat
Dissertation, Erlangen 1976

[34] Krause, N.,
Ein Verfahren zur Berechnung der Dispersion einer
Mikrostreifenleitung auf gyrotropem Substrat
AEÜ 31 (1977), S. 205-211

[35] Kaneki, T.,
Variational analysis for a ferrite-substrate microstrip
Electr. and Comm. in Japan 54-B (1971),No. 11, S. 40-45

[36] Hayashi,Y., Fujiki, Y., Suzuki, M.,
Analytical method for microstrip transmission line
with magnetized ferrite slab
Electr. and Comm. in Japan 54-B (1971),No. 11, S. 54-61

[37] Johnson, C. C.,
Field and Wave electrodynamics
McGraw-Hill, New York 1965

[38] McIsaac, P. L.,
Bidirectionality in gyrotropic waveguides
IEEE Trans. MTT 24 (1976), S. 223-226

[39] Rao, B. R., Wu, T. T.,
On the application of image theory in anisotropic media
IEEE Trans. AP 13 (1965), S. 814-815

[40] Severin, H.,
Zur Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen
Zeitschr. für Physik 129 (1951), S. 426-439

[41] Davies, B.,
Integral transforms and their applications
Springer, Berlin 1978

[42] Felsen, L. B., Marcuvitz, N.,
Radiation and scattering of waves
Prentice-Hall, New Jersey 1973

[43] Villeneue, A. T.,
Othogonality relationship for waveguides and cavities
with inhomogeneous anisotropic media
IRE Trans. MTT 7 (1959), S. 441-446

[44] Schumacher, W.,
Berechnung der Leitungswellenlänge zwei- und drei-schichtiger planarer Leitungen mit einer Momentenmethode
Dissertation, Karlsruhe 1979

[45] Knorr, J. B., Kuchler, K.-D.,
Analysis of coupled slots and coplanar strips on dielectric substrate
IEEE Trans. MTT 23 (1975), S. 541-548

[46] Müller, C.,
Grundprobleme der mathematischen Theorie elektromagnetischer Schwingungen
Springer, Berlin 1957

[47] Buschlüter, D.,
Dispersion von gekoppelten Streifenleitungen auf magnetisiertem Ferritsubstrat
Diplomarbeit, Bochum 1981

[48] Kiesewetter, H., Maeß, G.,
Elementare Methoden der numerischen Mathematik
Springer, Wien 1974

[49] Zürmühl., R.,
Praktische Mathematik
Springer, Berlin 1965

[50] Jansen, R. H.,
High-speed computation of single and coupled microstrip parameters including dispersion, high-order modes, loss and finite strip thickness
IEEE Trans. MTT 26 (1978), S. 75-82

[51] Warnkross, V.,
Experimentelle Untersuchung der Dispersion von Mikrostreifenleitungen auf magnetisiertem Ferritsubstrat im Frequenzbereich von 2 bis 18 GHz
Dissertation, Bochum 1977

[52] Hoffmann, R.,
Reflexionseigenschaften von Leerlauf und Kurzschluß einer Mikrostreifenleitung auf Ferritsubstrat
AEÜ 34 (1980), S. 371-376

[53] Wolff, I.,
Messung der effektiven Dielektrizitätszahlen des geraden und ungeraden Wellentyps auf gekoppelten Mikrostrip-Leitungen
NTZ 27 (1974), S. 30-34

[54] Wolff, I., Menzel, W.,
The microstrip double-ring resonator
IEEE Trans. MTT 23 (1975), S. 441-444

[55] Pintzos, S. G.,
Analyse von kreissymmetrischen planaren Resonanzstrukturen für die integrierte Mikrowellentechnik
Dissertation, Bochum 1977

[56] Jansen, R. H., Koster, H. L.,
Accurate results on the end effect of single and coupled microstrip lines for use in microwave circuit design
AEÜ 34 (1980), S. 453-459

[57] Itoh, T.,
Analysis of microstrip resonators
IEEE Trans. MTT 22 (1974), S. 946-952

[58] Musekamp. W.,
Bestimmung der Resonanzfrequenz von geraden Streifenleitungsresonatoren auf magnetisiertem Ferritsubstrat und Berechnung des Endeffekts
Studienarbeit, Bochum 1981

[59] Block, D.,
Wirkleistungsfluß und Leitungswellenwiderstände gekoppelter Streifenleitungen auf magnetisiertem Ferritsubstrat
Diplomarbeit, Bochum 1981

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Assistent am Institut für Hoch- und Höchstfrequenztechnik der Ruhr-Universität Bochum. Herrn Prof. Dr. Hans Severin gilt mein besonderer Dank für die Anregung des Themas, für das stete Interesse am Fortgang der Arbeit und wertvolle Diskussionen und Hinweise.

Herrn Prof. Dr. Siegfried Blume danke ich für die Übernahme des Korreferats und wertvolle Diskussionen.

Den Herren Detlef Block, Detlef Buschlüter und Wilhelm Musekamp danke ich für ihre Mitarbeit während der Durchführung ihrer Diplom- und Studienarbeiten, bei deren Betreuung ich mitwirkte.

Die numerischen Berechnungen dieser Arbeit wurden am Rechenzentrum der Ruhr-Universität durchgeführt.

Lebenslauf

Personalien

Name	Roland Hoffmann
Geburtsdatum, Geburtsort	11.2.1948, Vechta/Oldenburg

Schulausbildung

1954 - 1958	Volksschule Brome/Gifhorn
1958 - 1964	Mittelschule Wittingen und Realschule Bad Godesberg
März 1964	Abschluß der Realschule

Berufsausbildung

1964 - 1967	Lehre als Elektrowickler in Bonn
März 1967	Facharbeiterprüfung
Apr. 1967 - Sept. 1967	Industriepraktikum

Studium

WS 1967/68 - WS 1970/71	Studium der Elektrotechnik an der Staatlichen Ingenieurschule in Krefeld
Jan. 1971	Ingenieurexamen
SS 1971 - WS 1975	Studium der Elektrotechnik an der Ruhr-Universität in Bochum
Dez. 1975	Diplom

Berufstätigkeit

seit 1.2.1976	Wissenschaftlicher Assistent am Institut für Hoch- und Höchstfrequenztechnik der Ruhr-Universität Bochum